Мёбиусова геометрия плоскости.

Г3½◇1. Даны окружность C и точка $p \notin C$. Покажите, что существует единственная окружность или прямая, проходящая через p и перпендикулярная C, и постройте её циркулем и линейкой.

Г3½◇2. Даны две пары различных точек $a \neq b$ и $a' \neq b'$. Покажите, что существует единственное преобразование, являющееся поворотной гомотетией или сдвигом, переводящее a в a' и b в b'. Циркулем и линейкой укажите центр поворота или вектор сдвига этого преобразования.

Г3½◇3. Покажите, что каждое мёбиусово преобразование проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, не оставляющее на месте точку ∞, единственным образом представляется в виде композиции инверсии и движения, а всякое мёбиусово преобразование, переводящее ∞ в себя, является подобием.

Г3½◇4. Покажите, что любая пара непересекающихся окружностей переводится подходящей инверсией в пару концентрических окружностей, и выясните, при каком условии на радиусы две концентрических окружности переводятся одна в другую мёбиусовым преобразованием.

Г3½◇5. Покажите, что любая пара пересекающихся (соотв. касающихся) окружностей переводится инверсией в пару пересекающихся (соотв. параллельных) прямых, и выясните, когда две такие пары прямых переводятся одна в другую мёбиусовым преобразованием.

Г3½◇6 (окружность Апполония). Даны две различные точки $p, q \in \mathbb{C}$ и положительное число $\mu \in \mathbb{R}$. Покажите, что ГМТ z: $|z-p| = \mu \cdot |z-q|$ это окружность, причём точки p, q инверсны относительно этой окружности.

Г3½◇7 (пучки окружностей). Множество всех окружностей, проходящих через две различных заданных точки, называется *пучком пересекающихся окружностей*, множество всех окружностей, касающихся заданной окружности в заданной точке, — *пучком касающихся окружностей*, а множество всех окружностей, относительно которых две заданные точки инверсны друг другу, — *пучком непересекающихся окружностей*. Покажите, что **а)** все окружности Апполония двух данных точек образуют пучок непересекающихся окружностей **б)** все окружности, ортогональные двум данным окружностям, образуют пучок того же типа, что и эти окружности **в)** каждые две разных окружности содержатся в единственном пучке **г)** инверсия относительно любой окружности в пучке переводит любую окружность пучка в окружность из того же пучка.

Г3½◇8. Для каждого из трёх случаев взаимного расположения пары заданных окружностей[1] опишите все инверсии, которые переводят их друг в друга.

Г3½◇9. Пользуясь одним только циркулем, постройте **а)** середину данного отрезка **б)** точку, инверсную данной относительно данной окружности **в)** образ прямой, проходящей через две данные точки, при инверсии относительно данной окружности **г)** точку пересечения прямой, проходящей через две данные точки, с данной окружностью **д)** точку пересечения двух прямых, проходящих через две пары данных точек.

Г3½◇10. Докажите, что двойное отношение четырёх точек, высекаемых двумя данными окружностями C_1 и C_2 на ортогональной им окружности одинаково для всех ортогональных окружностей. Выясните, при каких его значениях $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$. Выразите угол между C_1 и C_2 через это двойное отношение.

Г3½◇11 (теорема Фейербаха). Покажите, что окружность, проходящая через середины сторон данного треугольника, касается его вписанной и всех трёх вневписанных окружностей.

[1] Пересечение двум разным точкам, касание, пустое пересечение.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 3½ (необязательный)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
8			
9а			
б			
в			
г			
д			
10			
11			