Группы Барзотти–Тейта и модули Дьедонне

Соглашение: все групповые схемы всегда предполагаются коммутативными, а поле k совершенным.

Задача 4.1. а) Отображение $n^D : G^D \to G^D$, которое двойственно умножению на целое число n на конечной групповой схеме, — это снова умножение на n.

б) Пусть дана группа Барзотти–Тейта $G_\bullet$. Тогда умножение на $p^n : G_{n+m} \to G_{n+m}$ раскладывается в композицию вложения $i_m : G_m \to G_{n+m}$ и сюрьекции $\pi_n : G_{n+m} \to G_m$, при этом последовательность групповых схем

$$0 \to G_m \xrightarrow{i_m} G_{n+m} \xrightarrow{\pi_m} G_n \to 0$$

точна. Докажите, что на двойственной групповой схеме G^D_{n+m} умножение на p^n раскладывается в композицию вложения $\pi^D_n : G^D_m \to G^D_{n+m}$ и сюрьекции $i^D_m : G^D_{n+m} \to G^D_m$. (Указание: воспользуйтесь точностью функтора $G \mapsto G^D$.)

Задача 4.2. а) Пусть групповая схема G этальна, а поле k алгебраически замкнуто. Тогда $G^D \cong \operatorname{Spec} k[G(k)]$, где коумножение на $k[G(k)]$ задается формулой $g \mapsto g \otimes g$ для $g \in G(k)$.

б) Если поле k алгебраически замкнуто, то для достаточно большого n существует замкнутое вложение групповых схем $G^D \to \mathbb{G}^n_m$.

Напомним, что буквой R мы обозначаем кольцо, которое порождено над $W = W(k)$ переменными F и V с соотношениями $FV = VF = p$, $Fa = F_W(a)F$ и $aV = VF_W(a)$, где $a \in W$. Фиксируем также R-модуль N, который конечнопорожден и свободен над W.

Задача 4.3. а) На N/pN умножение на F и V индуцирует эндоморфизмы F_p и V_p соответственно, для которых

$$\operatorname{Im} F_p = \operatorname{Ker} V_p \text{ и } \operatorname{Im} V_p = \operatorname{Ker} F_p.$$

б) Если F и V действуют на N топологически нильпотентно, то

$$0 < \dim_k N/(FN + VN) \leq \operatorname{rk}_W(N)/2.$$

Задача 4.4. Если наклоны группы Барзотти–Тейта $G_\bullet$ равны $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то наклоны двойственной по Картье группы Барзотти–Тейта $G^D_\bullet$ равны $1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_n$

Задача 4.5. а) У модуля Дьедонне $N = M(E[p^\infty])$ суперсингулярной элиптической кривой E над алгебраически замкнутым полем есть базис v_1, v_2 над W, для которого

$$Fv_1 = v_2 \text{ и } Fv_2 = pv_1.$$

б) Любой эндоморфизм $\varphi \in \operatorname{End}(N)$ имеет вид

$$\varphi(v_1) = av_1 + bv_2,$$

$$\varphi(v_2) = pF_W(b)v_1 + F_W(a)v_2,$$

где $a, b \in W(\mathbb{F}_{p^2})$. Указание: $W(\mathbb{F}_{p^2}) = \{a \in W | F^2 a = a\}$.

в) Алгебра $\operatorname{End}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ является четырехмерной алгеброй с делением над $\mathbb{Q}_p$.