Групповые схемы

Задача 3.1. Возьмем в качестве определения групповой схемы такое: групповая схема $G = \operatorname{Spec} A$ — это спектр алгебры Хопфа A. Докажите, что для любой k-алгебры B множество $G(B) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} B, G)$ является группой.

Задача 3.2. а) Групповая схема μ_{p^n} представляет функтор $B \mapsto \{b \in B | b^{p^n} = 1\}$.
б) Групповая схема α_{p^n} представляет функтор $B \mapsto \{b \in B | b^{p^n} = 0\}$.

Задача 3.3. Групповая схема α_p простая, то есть не содержит замкнутых групповых подсхем.

Задача 3.4. Для конечной коммутативной групповой схемы $G = \operatorname{Spec} A$ можно определить функтор

$$B \mapsto Hom_{\operatorname{Spec} B}(G \times \operatorname{Spec} B, \mathbb{G}_m \times \operatorname{Spec} B),$$

где речь идет о гомоморфизмах групповых схем. Докажите, что этот функтор представим схемой $G^D = \operatorname{Spec} A^D$, где $A^D = \operatorname{Hom}_k(A, k)$, при этом умножение (коумножение) на A индуцирует коумножение (умножение) на A^D.

Задача 3.5. $\mu_p \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^D \cong \operatorname{Spec} k[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$, где $k[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ — групповая алгебра группы $k[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$.

Задача 3.6. а) Возьмем $y \in \alpha_p(B)$. Обозначим через $\exp(t)$ формальный степенной ряд для экспоненты (а точнее, первые его p слагаемых). Тогда для каждой B-алгебры B' отображение $x \mapsto \exp(xy)$ задает гомоморфизм групп $\alpha_p(B') \to G_m(B')$, и, соответственно, групповых схем над $\operatorname{Spec} B$:

$$\alpha_p \times \operatorname{Spec} B \to G_m \times \operatorname{Spec} B.$$

б) $\alpha_p^D \cong \alpha_p$.