Функции многих переменных. Функции, заданные неявно.

Связным множеством называется множество X, которое нельзя представить в виде дизъюнктивного объединения $X_1 \sqcup X_2$ двух открытых в X (в индуцированной топологии) множеств с пустым пересечением. Множество X называется линейно связным, если любые две его точки $x_1, x_2 \in X$ могут быть соединены непрерывной кривой γ:

$$\gamma : [a,b] \to X, \qquad \gamma(a) = x_1, \quad \gamma(b) = x_2,$$

образ которой целиком лежит в X.

1. (а) Опишите все связные подмножества прямой.

(б) Докажите, что линейно связное множество связно.

(в) Приведите пример связного, но не линейно связного множества.

Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество.

2. Докажите, что область линейно связна.

3. Докажите, что функция $f(x,y)$, имеющая ограниченные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой выпуклой области G, равномерно непрерывна в этой области.

4. Докажите, что, если функция $f(x,y)$ в некоторой области G непрерывна по x при каждом фиксированном y и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial u}{\partial y}$, то эта функция непрерывна в области G.

5. Пусть $f(x,y)$ – непрерывно дифференцируемая функция в некоторой области G и $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ в области G. Верно ли утверждение, что функция $f(x,y)$ не зависит от y в области G?

6. Пусть $F(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Напишите уравнение касательной плоскости к линии уровня функции $F(x,y,z) = F(x_0,y_0,z_0)$ в точке (x_0,y_0,z_0) и покажите, что градиент функции F ортогонален касательной плоскости.

7. Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в точке $(1,-2)$ для каждой дифференцируемой функции $u(x,y)$, заданной неявно уравнением $u^3 - 4xu + y^2 - 4 = 0$.

8. Найдите в указанной точке дифференциал функции $u(x,y)$, заданной неявно уравнением:

(а) $x + y - u = e^{u-x-y}$, (x_0, y_0);

(б) $x - u = u\ln(u/y)$, $(1,1)$.

9. Рассмотрим линейное уравнение с частными производными первого порядка

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Докажите, что первые интегралы системы

$$\frac{\dot{x}(t)}{f_1} = \frac{\dot{y}(t)}{f_2} = \frac{\dot{z}(t)}{f_3}, \tag{2}$$

то есть такие функции $F(x,y,z) = \mathrm{const}$, которые постоянны на решениях уравнения (2), являются решениями уравнения (1).

10. Найдите решения уравнений:

(а) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

(б) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.