НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 8. 11 ноября 2016 г.

Функции многих переменных

1. Придумайте функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющую в точке $x_0 \in \mathbb{R}^2$ производную вдоль любого вектора, но (а) разрывную в x_0; (б) непрерывную в x_0, но не дифференцируемую в x_0; (в) непрерывную в $\mathbb{R}^2$, дифференцируемую в $\mathbb{R}^2 \setminus x_0$, но не дифференцируемую в x_0.

2. Приведите пример функции $f(x, y)$, у которой в точке (x_0, y_0) существуют обе смешанные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, но они не равны.

3. Докажите, что если f непрерывна в замкнутом n-мерном шаре, равна нулю на границе и дифференцируема во всех внутренних точках, то, по крайней мере, одна из внутренних точек является ее критической точкой.

4. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество и пусть функции $f, g : U \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в $x_0 \in U$. Докажите, что (а) $d(f \cdot g)(x_0) = df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot dg(x_0)$;

(б) Докажите, что если $g(x_0) \neq 0$, то f/g – диффернцируема в x_0 и

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

5. Для функций (а) $f(x, y) = x^2 - x^4 - y^2$ и (б) $f(x, y) = \cos x - y^2$ нарисуйте их линии уровня $\{(x, y) | f(x, y) = c\}$ и найдите их экстремумы.

6. Пусть f – гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, и пусть ее ограничение на любую прямую, проходящую через x_0, имеет максимум в x_0. Верно ли, что x_0 – точка максимума функции f?

7. Напишите уравнение касательной плоскости к графику функции $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in U$.

8. Опишите все функции $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие уравнению $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

9. Уравнением колебаний струны называется следующее уравнение относительно неизвестной функции $u \in C^2(\mathbb{R})$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

График функции $y(x) = y(x, t)$ при фиксированном t представляет собой профиль струны в момент времени t.

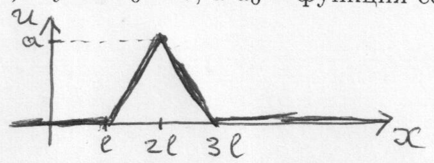
(а) Найдите общее решение этого уравнения. (*Указание: рассмотрите новые координаты* $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.)

(б) Пусть заданы начальные условия

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t'(x, 0) = v_0(x) \end{cases}$$

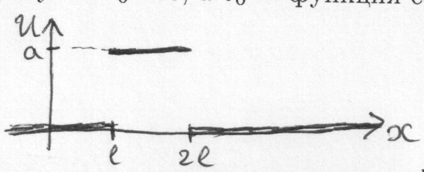
Напишите формулу для решения, заданного этими условиями.

(в) (*Струна гитары.*) Пусть $v_0 = 0$, а u_0 – функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в момент времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, \ldots, 5$.

(г) (*Струна рояля.*) Пусть $u_0 = 0$, а v_0 — функция со следующим графиком:



Нарисуйте профиль струны в момент времени $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, \ldots, 5$.