Независимый Московский Университет, Алгебра-3, осень 2016

7

Во всех задачах $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле.

7.1. Пусть в очевидных обозначениях $\underline{\infty} \in \mathbf{P}_1(\Bbbk)$. Задайте уравнениями $||3\underline{\infty}|| \subset \mathbf{P_3}(\Bbbk)$.

7.2. Пусть кривая $\dot{\mathbf{E}}$ задана в аффинных координатах (x, y) уравнением $y^2 = x^3 + ax + b$, причём $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Её *проективное замыкание* $\mathbf{E} \subset \mathbf{P_2}(\Bbbk)$ задаётся в проективных координатах $(x : y : z)$ уравнением $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$. Найдите такую точку $\underline{\infty} \in \mathbf{E}$, что $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \setminus \{\underline{\infty}\}$. Докажите, что $\mathbf{E} \simeq ||3\underline{\infty}||$.

7.3. Пусть кривая $\dot{\mathbf{E}}$ задана в аффинных координатах (x, y) уравнением $y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ причём $x_1, x_2, x_3 \in \Bbbk$ попарно различны. Пусть кривая $\mathbf{E} \subset \mathbf{P_2}(\Bbbk)$ и точка $\underline{\infty} \in \mathbf{E}$ определены так же, как в задаче **7.2**, а точки $P_i \in \dot{\mathbf{E}}$ при $i = 1, 2, 3$ определены условиями $x(P_i) = x_i, y(P_i) = 0$. Покажите, что $||\underline{\infty} + P_1 + P_2 + P_3|| \subset \mathbf{P_3}(\Bbbk)$ – пересечение двух квадрик.

7.4.* Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2, 3, 5$, и кривая $\dot{\mathbf{C}}$ задана в аффинных координатах (x, y) уравнением $y^2 = 1 - x^5$. Докажите, что существует такая гладкая проективная кривая $\mathbf{C}$ и точка $\underline{\infty} \in \mathbf{C}$, что $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \setminus \{\underline{\infty}\}$ и что $||5\underline{\infty}|| \subset \mathbf{P_3}(\Bbbk)$ лежит на единственной квадрике и на семействе кубик. Совпадает ли $||5\underline{\infty}||$ с пересечением квадрики и кубики?

Для полей $\Bbbk \subset \mathcal{K}$ рассмотрим *алгебру дифференцирований*, состоящую из $\Bbbk-$линейных отображений

$$\mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K}) := \{\partial : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K} \mid \partial(\Bbbk) = \{0\} \text{ и } \forall x, y \in \mathcal{K}\ [\partial(xy) = \partial(x)y + x\partial(y)]\}$$

7.5. Проверьте, что $\mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K})$ – *алгебра Ли* относительно операции коммутирования $[\partial_1, \partial_2] := \partial_1 \circ \partial_2 - \partial_2 \circ \partial_1$.

7.6. Докажите, что, если $\mathcal{K}$ – поле рациональных функций на плоской алгебраической кривой над $\Bbbk$, то $\dim_{\mathcal{K}} \mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K}) = 1$.

7.7. Найдите в $\mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\Bbbk(x))$ подалгебру Ли (*инфинитеземальных дробно-линейных преобразований*), изоморфную $\mathsf{sl}_2(\Bbbk)$.

7.8. Пусть кривая $\mathbf{E}$ – такая же, как в задаче **7.2**, а $\mathcal{K} = \Bbbk(\mathbf{E})$. Найдите такое дифференцирование $\partial \in \mathrm{Diff}_{\Bbbk}(\mathcal{K})$, что для любой $f \in \mathcal{K}$ выполняется равевнство $\mathrm{div}(\partial(f)) = \mathrm{div}(f)$.

10 ноября, *Г.Б. Шабат*