Абелевы группы (и другие модули)

Задача 12.1. Пусть $F = \mathbb{Z}^n$, $\phi\colon F \to F$. Докажите, что группа $F/\operatorname{Im}\phi$ конечна тогда и только тогда, когда $\det\phi \neq 0$.

Задача 12.2. Найдите группы а) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, A)$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/m, A)$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n)$;
б) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n)$; в) $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ для конечной группы A.

Задача 12.3. При каких m и n группы $\mathbb{Z}/mn$ и $\mathbb{Z}/m \oplus \mathbb{Z}/n$ изоморфны?

▷ Если фактор группы G по (нормальной) подгруппе H_1 изоморфен группе H_2, то говорят, что G является *расширением* группы H_2 (sic!) с помощью группы H_1.

Задача 12.4. Опишите все абелевы группы, являющиеся расширениеми
а) $\mathbb{Z}/p$ с помощью $\mathbb{Z}/q$ (p и q простые);
б) $\mathbb{Z}/4$ с помощью $\mathbb{Z}/4$;
в) $\mathbb{Z}/6$ с помощью $\mathbb{Z}/6$.

Задача 12.5. Любая конечнопорожденная подгруппа абелевой группы A свободна. Можно ли утверждать, что группа A свободна?

Задача 12.6. Подмодуль $N \subset M$ является прямым слагаемым тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $M \to N$, тождественный на N.

Задача 12.7. Любой подмодуль конечнопорожденного свободного модуля над кольцом R (без делителей нуля) свободен тогда и только тогда, когда R — кольцо главных идеалов.

Задача 12.8. Приведите пример конечнопорожденного модуля над кольцом R, не являющегося прямой суммой модулей вида R/I для а) $R = \mathbb{Z}[x]$; б) $R = \mathbb{C}[x, y]$.