Листок 3. Теория Струн, НМУ 2016

Упражнение 1: Для NSR струны

$$S[X^\mu,\psi^\mu]=\frac{1}{2}\int d^2\xi(\partial_a X^\mu\partial_a X_\mu - i\bar\psi^\mu\rho^a\partial_a\psi_\mu)\,, \tag{0.1}$$

где $a=0,1$ и $\mu=0,\ldots,d-1$ и $\rho^0=\sigma^2$, $\rho^1=i\sigma^1$, и σ^i матрицы Паули, используя Пуанкаре инвариантность в таргет пространстве выведите сохраняющиеся токи

$$\begin{aligned} &P^\mu_a=\partial_a X^\mu,\\ &J^{\mu\nu}_a=(X^\mu\partial_a X^\nu - X^\nu\partial_a X^\mu + i\bar\psi^\mu\rho_a\psi^\nu)\,. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Упражнение 2: Проверьте, что действие для NSR струны (0.1) обладает глобальной Пуанкаре симметрией на мировом листе

$$\xi^a\to T^a_b\xi^b+R^a\,. \tag{0.3}$$

Покажите, что сохраняющийся ток в данном случае есть

$$T_{ab}=\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu + \frac{i}{4}\psi^\mu(\rho_a\partial_b+\rho_b\partial_a)\psi^\mu - \delta_{ab}T_{cc}\,. \tag{0.4}$$

Упражнение 3: Проверьте, что действие (0.1) обладает глобальной суперсимметрией на мировом листе

$$\delta X^\mu=\bar\varepsilon\psi^\mu,\quad \delta\psi^\mu=-i\rho^a(\partial_a X^\mu)\varepsilon\,. \tag{0.5}$$

где ε — постоянный антикоммутирующий спинор. Покажите, что на уравнениях движения

$$\begin{aligned} &[\delta_1,\delta_2]X^\mu=\delta_1(\bar\varepsilon_2\psi^\mu)-\delta_2(\bar\varepsilon_1\psi^\mu)=R^a\partial_a X^\mu,\quad R^a=2i\bar\varepsilon_1\rho^a\varepsilon_2\,,\\ &[\delta_1,\delta_2]\psi^\mu=R^a\partial_a\psi^\mu\,. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Задача 1: Используя суперсимметричные преобразования из Упражнения 3 получите сохраняющийся суперток

$$J_a=\frac{1}{2}\rho^b\rho_a\psi^\mu\partial_b X^\mu \tag{0.7}$$

и проверьте, что на уравнениях движения действительно ток сохраняется $\partial_a J_a=0$.

Задача 2: Проверьте, что для T_{ab} из (0.4) и J_a из (0.7) верно

$$T_{aa}=0,\quad \rho^a J_a=0\,. \tag{0.8}$$

Эти уравнения обеспечивают суперконформную инвариантность действия NSR струны.

Задача 3: Введя комплексные координаты $z=\xi^1+i\xi^2$ и $\bar z=\xi^1-i\xi^2$, проверьте, что

$$\begin{aligned} &\bar\partial T=\partial\bar T=0\,,\\ &\bar\partial G=\partial\bar G=0\,, \end{aligned} \tag{0.9}$$

где $T = T_{zz}$, $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$ и $G = J_{z,+}$ и $\bar{G} = J_{\bar{z},-}$, где $\pm$ обозначают спинорный индекс $\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi^\mu_+ \\ \psi^\mu_- \end{pmatrix}$. Покажите, что

$$\begin{aligned} T &= (\partial X^\mu)^2 + \frac{1}{2}\psi^\mu \partial \psi^\mu \,, \\ G &= \psi^\mu \partial X^\mu \,. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Задача 4: Используя скобки Пуассона

$$\begin{aligned} [\partial X^\mu(u), \partial X^\nu(z)] &= \eta^{\mu\nu}\delta'(u-z)\,, \\ \{\psi^\mu(u), \psi^\nu(z)\} &= \eta^{\mu\nu}\delta(u-z) \end{aligned} \tag{0.11}$$

получите скобку Пуассона для G

$$\{G(u), G(z)\} = \delta(u-z)T(z)\,. \tag{0.12}$$

Вместе со скобкой $[T(u), T(z)]$ это означает, что генераторы связей удовлетворяют соотношениям бесконечномерной алгебры Супер-Вирасоро.

Задача 5: Используя OPE (Operator Product Expansion)

$$\begin{aligned} \partial X^\mu(u)\partial X^\mu(z) &= \frac{\eta^{\mu\nu}}{u-z} + \dots\,, \\ \psi^\mu(u)\psi^\nu(z) &= \frac{\eta^{\mu\nu}}{u-z} + \dots\,, \end{aligned} \tag{0.13}$$

выведите OPE для T и G

$$\begin{aligned} T(u)T(z) &= \frac{c}{2(u-z)^4} + \frac{2}{(u-z)^2}T(z) + \frac{1}{u-z}\partial T(z) + \dots\,, \\ T(u)G(z) &= \frac{3}{2}\frac{1}{(u-z)^2}G(z) + \frac{1}{(u-z)}\partial G(z) + \dots\,, \\ G(u)G(z) &= \frac{2c}{3(u-z)^3} + \frac{2}{u-z}T(z) + \dots\,, \end{aligned} \tag{0.14}$$

где ... означает несингулярный члены. Здесь $c = 3d/2$ — центральный заряд для $N = 1$ Супер-Вирасоро.