

## Листок 2. Теория Струн, НМУ 2016

( Сканы/фото решений данного листка принимаются  
на e-mail: )

**Задача 1:** Проверьте, что вектор  $k^\mu$  является собственным значением оператора импульса струны, летящей в target-space.

**Задача 2:** Рассмотрим общий вид состояния на первом уровне

$$|\psi\rangle = A_\mu a_{-1}^\mu |0; k\rangle, \quad (0.1)$$

где  $A_\mu$  — коэффициенты, которые могут зависеть от  $k^\mu$ . Физическим называется состояние, для которого верно  $L_n|\psi\rangle = 0$ , для всех  $n > 1$  и  $L_0|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ , найдите отсюда, какими должны быть  $A_\mu$ . Как связаны  $a$  и  $k^\mu$ ? Найдите при каких  $a$  и  $d$  будут физические состояния с отрицательными нормами? с нулевой нормой? только с положительными? Для этого рассмотрите три случая  $a > 1$ ,  $a < 1$  и  $a = 1$ .

**Задача 3:** При  $a = 1$  имеется состояние  $k_\mu a_{-1}^\mu |0, k\rangle$  с  $k_\mu^2 = 0$ . Покажите, что это состояние может быть записано, как  $|\phi\rangle = L_{-1}|0, k\rangle = k_\mu a_{-1}^\mu |0, k\rangle$ . Таким образом это состояние ортогонально всем физическим состояниям и может быть выброшено.

**Задача 4:** Прделайте тоже самое, что и в Задаче 2, но только для состояния на втором уровне, общий вид которого можно записать как

$$|\psi\rangle = (A_{\mu\nu} a_{-1}^\mu a_{-1}^\nu + B_\mu a_{-2}^\mu) |0; k\rangle. \quad (0.2)$$

Покажите, что при  $a < 1$  есть состояние с отрицательной нормой. Покажите, что при  $a = 1$  есть состояния с нулевой нормой, но все они имеют вид  $|\phi''\rangle = L_{-1}(c_\mu a_{-1}^\mu |0, k\rangle)$ , где  $c_\mu k_\mu = 0$ .

**Упражнение 1:** Покажите, что  $[L_n, J^{\mu\nu}] = [L_n, P^\mu] = 0$ , где  $P^\mu$  и  $J^{\mu\nu}$  генераторы группы Пуанкаре, полученные в Листке 1. Их коммутация с операторами  $L_n$  означает, что условие физичности состояния инвариантно относительно симметрии Пуанкаре.

**Задача 5:** Сумме каких неприводимых представлений группы Лоренца соответствуют физические состояния на уровнях 0 и 1 в случаях открытой и замкнутой струны.

**Задача 6:** Проверьте, что при  $d = 26$  норма состояния

$$|\phi\rangle = \left( L_{-2} + \frac{3}{2} L_{-1}^2 \right) |0; k\rangle, \quad (0.3)$$

обращается в ноль и  $|\phi\rangle$  является физическим.

**Задача 7:** Покажите, что производящая функция для физических состояний

$$\chi_{\text{Физ}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^{25}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left( q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right) \quad (0.4)$$

приводится к виду  $\chi_{\text{Физ}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-24}$ . Для этого используйте тождество Якоби

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} t^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)(1 + q^{k-\frac{1}{2}}t)(1 + q^{k-\frac{1}{2}}t^{-1}). \quad (0.5)$$