Теорема Серра-Свана

3½◇1. а) Ортогональное дополонение к подрасслоению векторного расслоения снова векторное расслоение.

б) Всякое расслоение над компактной базой — подрасслоение в тривиальном.

в*) Для некомпактной базы это неверно.

▷ Возможно, этот пункт будет проще решить узнав кое-что про классы Штифеля-Уитни.

3½◇2. Пусть X — компактное топологическое пространство, а $C(X) = C_{\mathbb{K}}(X)$ — кольцо непрерывных $\mathbb{K}$-значных функций на X. Пусть ξ — $\mathbb{K}$-векторное расслоение над X (для произвольного поля $\mathbb{K}$-векторное расслоение определяется дословно так же, как и в вещественном случае с заменой поля).

а) Покажите, что множество сечений $\Gamma(\xi)$ обладает структурой $C(X)$-модуля.

б) Γ аддитивный функтор из категории $Vect^{\mathbb{K}}(X)$ конечномерных $\mathbb{K}$-векторных расслоений в категорию $C(X)$-модулей. Расслоение ξ тривиально тогда и только тогда, когда $\Gamma(\xi)$ — свободный модуль.

в) Для любого $\mathbb{K}$-векторного расслоения ξ над X $\Gamma(\xi)$ конечно порождённый проективный модуль.

3½◇3 (теорема Серра-Свана). Категория $Vect^{\mathbb{K}}(X)$ конечномерных $\mathbb{K}$-векторных расслоений над компактным топологическим пространством X эквивалентна категории конечно порождённых проективных $C(X)$-модулей.

а) Пусть $s\colon U_x \to E(\xi)$ — сечение расслоения ξ над окрестностью точки x. Докажите, что существует такое сечение $\widetilde{s}\colon X \to E(\xi)$, что s и $\widetilde{s}$ совпадают на некоторой окрестности точки x.

б) Если $f, g\colon \xi \to \eta$ — два морфизма расслоений, причём $\Gamma(f) = \Gamma(g)\colon \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$, то $f = g$.

в) Пусть $I_x \overset{\text{def}}{=} \{a \in C(X) \big| a(x) = 0\}$ — двусторонний идеал в $C(X)$. Тогда отображаеие $s \mapsto s(x)$ задаёт изоморфизм $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \cong F_x(\xi)$ (слой ξ над x).

г) Пусть $F\colon \Gamma(\xi) \to \Gamma(\eta)$ морфизм $C(X)$-модулей. Тогда существует единственный морфизм расслоений $f\colon \xi \to \eta$, такой, что $F = \Gamma(f)$. В частности, $\xi \cong \eta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(\xi) \cong \Gamma(\eta)$.

д) Докажите теорему Серра-Свана.

▷ Пусть $Y \subseteq X$ — подпространство. Относительным расслоением над (X, Y) называется тройка (ξ, h, n), где ξ — векторное расслоение над X, а $h\colon p^{-1}(Y) \xrightarrow{\cong} Y \times \mathbb{R}^n$ — его тривиализация над Y. Относительные расслоения ξ_1, ξ_2 над (X, Y) изоморфны, если существует такой изоморфизм $f\colon \xi_1 \xrightarrow{\cong} \xi_2$ их как расслоений над X, что $h_2 = f \circ h_1^{-1}$.

3½◇4. а) Класс эквивалентности относительных расслоений зависит только от класса гомотопии отображения тривиализации.

б) Все стандартные операции с расслоениями (сумма, тензорное произведение, обратный образ) распространяются на относительные расслоения, так что верно утверждение о гомотопической инвариантности обратного образа.

в) Категория относительных расслоений над парой (X, Y) эквивалентна категории относительных расслоений над парой $(X/Y, pt)$.

г) Выведите из этого теорему Серра-Свана для относительных расслоений.

Указание. Рассмотрите идеал функций, зануляющихся на Y.