Задачи по группам и алгебрам Ли – 6. Формула Вейля.

Для получения оценки “10” по данному листку 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки.

В дальнейшем $G = U_n$ – унитарная группа пространства $\mathbb{C}^n$. Зафиксируем базис в $\mathbb{C}^n$ и определим $T \subset U_n$ как подгруппу унитарных матриц, диагональных в этом базисе (это, очевидно, n-мерный тор). Симметрическая группа S_n, переставляющая базисные элементы пространства $\mathbb{C}^n$, содержится в $G = U_n$. Из задач предыдущего листка следует, что нормализатор $N(T)$ тора T в группе Ли G есть TS_n и пересечение любого класса сопряженности в группе G с тором T есть орбита симметрической группы S_n – таким образом, корректно определено отображение $\pi : G \to T/S_n$, переводящее $g \in G$ в пересечение класса сопряженности элемента g с тором T. Пусть e_{kl} – стандартный базис из матричных единиц в алгебре $n \times n$-матриц. Тогда $e_{kl} - e_{lk}$, $ie_{kl} + ie_{lk}$ образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_n$. Зафиксируем также координаты на торе T, $t_k := \exp(ie_{kk})$.

1. а) Докажите, что однородное пространство G/T является гладким многообразием и левое действие группы Ли G на G/T гладко. **б)** Докажите, что правое действие группы $N(T)$ на G/T ($h \in N(T)$ действует как $gT \mapsto ghT$) определено корректно и перестановочно с левым действием группы G. **в)** Докажите, что это действие пропускается через фактор $N(T)/T = S_n$, т.е. подгруппа $T \subset N(T)$ действует тривиально.

2*. а) Докажите, что множество G_{reg} унитарных матриц с попарно различными собственными значениями является в G открытым подмножеством полной меры. **б)** Докажите, что G_{reg} инвариантно относительно действия G сопряжениями и диффеоморфно $(T_{reg} \times G)/N(T) = (T_{reg} \times (G/T))/S_n$ (группа $N(T)$ действует на первом сомножителе сопряжениями, а на втором справа). *Указание:* покажите, что класс сопряженности регулярного элемента есть G/T. Искомый диффеоморфизм дается отображением $\varphi : (T_{reg} \times G)/N(T) \to G_{reg}$, $t \times g \mapsto gtg^{-1}$. **г)** Вычислите значение полей скоростей элементов $e_{kl} - e_{lk} \in \mathfrak{g}$ и $ie_{kl} + ie_{lk} \in \mathfrak{g}$ в точке $t \in T$ при действии группы G на себе сопряжениями, отождествив касательное пространство T_tG с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ при помощи диффеоморфизма правого сдвига на t. **д)** Вычислите дифференциал диффеоморфизма $\varphi : (T_{reg} \times (G/T))/S_n \to G_{reg}$ точке $t \times eT$ как оператор $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{t} \to \mathfrak{g} = T_tG$.

3. а) Докажите, что на однородном пространстве G/T существует единственная с точностью до пропорциональности G-инвариантная дифференциальная форма старшей степени. Зафиксируем такую форму и обозначим ее ω. **б)** Докажите, что ω косоинвариантна относительно правого действия S_n на G/T. **в)** Пусть μ_G – мера Хаара на группе G, а μ_T – мера Хаара на торе T. Докажите, что на многообразии $(T_{reg} \times (G/T))/S_n$ имеем $\varphi^*\mu_G = p\mu_T \wedge \omega$, где $p : T \to \mathbb{R}$ – функция, инвариантная относительно действия S_n. **г*)** Пользуясь задачей 2д, докажите, что $p(t) = \prod\limits_{i<j}(t_i - t_j)(t_i^{-1} - t_j^{-1}) = \prod\limits_{i<j}|t_i - t_j|^2$ с точностью до постоянного множителя.

4. а) Пусть $V(t_1, \ldots, t_n)$ – определитель матрицы Вандермонда, т.е. $n \times n$-матрицы с коэффициентами t_i^{n-j}. Докажите, что $V(t_1, \ldots, t_n) = \prod\limits_{i<j}(t_i - t_j)$. **б)** Докажите, что всякий кососимметрический полином Лорана от $t_1, \ldots, t_n$ делится на $V(t_1, \ldots, t_n)$, и частное есть симметрический полином Лорана. **в)** Пусть λ – доминантный вес, т.е. невозрастающий набор целых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Полиномом Шура называется функция $s_\lambda(t_1, \ldots, t_n) = \frac{V_\lambda(t_1,\ldots,t_n)}{V(t_1,\ldots,t_n)}$, где $V_\lambda(t_1, \ldots, t_n)$ – определитель матрицы с коэффициентами $t_i^{\lambda_j+n-j}$. Докажите, что полиномы Шура образуют базис в пространстве симметрических полиномов Лорана от переменных $t_1, \ldots, t_n$.

5. а) Пользуясь задачей 3г, докажите, что характеры неприводимых представлений группы G как функции на T образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $(f, g) := \frac{1}{n!}\int_T f(t)\overline{g(t)}p(t)\mu_T$. **б)** Докажите, что характеры представлений V_λ являются ортогонализацией мономиального базиса в пространстве симметрических полиномов Лорана относительно скалярного произведения $(f, g) := \frac{1}{n!}\int_T f(t)\overline{g(t)}p(t)\mu_T$. *Указание:* введите линейный порядок на весах, согласованный с имеющимся частичным, и воспользуйтесь индукцией по этому порядку. **в)** Докажите *формулу Вейля для характера:* $\chi_{V_\lambda}(t) = s_\lambda(t)$.

6*. Докажите *формулу Вейля для размерности:* $\dim V_\lambda = \frac{\prod\limits_{1\le k<l\le n}(\lambda_k - \lambda_l + l - k)}{\prod\limits_{k<n} k!}$. *Указание:* надо вычислить значение характера $\chi_{V_\lambda}(t)$ при $t = 1$. Примените к $\chi_{V_\lambda}(t)$ гомоморфизм из кольца функций на торе T в кольцо $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, действующий как $t_k \mapsto z^{n-k}$, а затем воспользуйтесь формулой Вандермонда и правилом Лопиталя.

7*. Для $G = U_3$ выразите размерность весового пространства $\dim V_\lambda(\nu)$ явно в виде кусочно-линейной функции от λ и ν.