Задачи по группам и алгебрам Ли – 5. Представления унитарной группы.

Для получения оценки “10” по данному листку 80% пунктов задач. Дедлайн 3 декабря.

1. Докажите, что все неприводимые комплексные представления абелевой группы одномерны.

2. а) Докажите, что всякое комплексное представление окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ является прямой суммой одномерных представлений вида $z \mapsto z^k$, где $k \in \mathbb{Z}$. **б)** Докажите, что всякое комплексное представление представления n-мерного тора $T = (S^1)^{\times n}$ является прямой суммой одномерных представлений вида $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{k_n}$, где $k_i \in \mathbb{Z}$. Таким образом, неприводимые представления n-мерного тора нумеруются решеткой $\mathbb{Z}^n$ (называемой решеткой характеров данного тора).

В дальнейшем $G = U_n$ – унитарная группа пространства $\mathbb{C}^n$. Зафиксируем базис в $\mathbb{C}^n$ и определим $T \subset U_n$ как подгруппу унитарных матриц, диагональных в этом базисе (это, очевидно, n-мерный тор). Симметрическая группа S_n, переставляющая базисные элементы пространства $\mathbb{C}^n$, содержится в $G = U_n$.

Пусть $\delta_1, \ldots, \delta_n$ – стандартный базис в решетке $\mathbb{Z}^n$. Для диагональной матрицы $t \in T$ с диагональными элементами $t_1, \ldots, t_n$ и элемента $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1\delta_1 + \ldots + \lambda_n\delta_n \in \mathbb{Z}^n$ положим $t^\lambda := t_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{\lambda_n}$.

3. а) Докажите, что нормализатор тора T в группе G есть $T{\cdot}S_n$. В частности, подгруппа $S_n \subset G$ действует на торе T сопряжениями (переставляя диагональные элементы). **б)** Докажите, что пересечение любого класса сопряженности в группе G с тором T есть орбита симметрической группы S_n. **в)** Докажите, что характер любого представления группы G однозначно задается своим ограничением на тор T. **г)** Докажите, что это ограничение является симметрическим полиномом Лорана от координат $t_1, \ldots, t_n$.

В дальнейшем мы будем называть характером представления группы G соответствующую симметрическую функцию на торе T.

4. Пусть V – комплексное представление группы U_n. **а)** Докажите, что векторное пространство V есть прямая сумма $V = \bigoplus\limits_{\nu \in \mathbb{Z}^n} V(\nu)$, где $V(\nu) := \{v \in V \mid t(v) = t^\nu v \ \forall\ t \in T\}$. **б)** Покажите, что характер представления V равен $\sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}^n} t^\nu \dim V(\nu)$.

5. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление группы $G = U_n$. Докажите, что следующие представления неприводимы, и вычислите их характеры: **а)** V; **б)** V^*; **в)** $\Lambda^k V$; **г)** $S^k V$; **д)** $\Lambda^k V^*$; **е)** $S^k V^*$.

6. Пусть $C = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_i \geq \lambda_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$. Пусть $\lambda, \mu \in C$. Будем говорить, что $\lambda \leq \mu$, если $\mu = \lambda + \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} k_{ij}(\delta_i - \delta_j)$ для некоторых целых неотрицательных k_{ij}. Докажите, что отношение $\leq$ задает частичный порядок на множестве C.

7. Пусть $\lambda \in C$. Определим $m_\lambda := \sum\limits_{\mu \in S_n\lambda} t^\mu$ – мономиальные симметрические функции на торе T (т.е. сумма всех мономов, получающихся из t^λ перестановкой сомножителей, по одному разу). **а)** Докажите, что функции m_λ образуют базис в пространстве симметрических полиномов Лорана на торе T. **б)** Докажите, что характер представления $(\Lambda^n V)^{\otimes \lambda_n} \bigotimes\limits_{k=1}^{n-1} (\Lambda^k V)^{\otimes(\lambda_k - \lambda_{k+1})}$ имеет вид $m_\lambda + \sum\limits_{\mu < \lambda} k_\mu m_\mu$, где k_μ – некоторые целые числа (если $\lambda_n < 0$, то по определению $(\Lambda^n V)^{\otimes \lambda_n} := (\Lambda^n V^*)^{\otimes -\lambda_n}$). **в)** Докажите, что характеры представлений из предыдущего пункта образуют базис в пространстве симметрических полиномов Лорана. **г)** Докажите, что для каждого $\lambda \in C$ существует единственное неприводимое представление V_λ группы G такое, что характер V_λ имеет вид $m_\lambda + \sum\limits_{\mu < \lambda} k_\mu m_\mu$. **д)** Докажите, что всякое неприводимое представление группы G изоморфно какому-нибудь V_λ.

8. Опишите все неприводимые представления группы U_2 и найдите их характеры.