Задачи по группам и алгебрам Ли – 3. Представления и универсальная обертывающая алгебра.

Для получения оценки “10” по данному листку 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Дедлайн 22 октября.

1*. Пусть $\pi : \widetilde{G} \to G$ – универсальное накрытие связной группы Ли G и $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. **а)** Докажите, что $\widetilde{G}$ имеет единственную структуру группы Ли, такую, что $\tilde{e}$ является единицей и отображение π является гомоморфизмом групп Ли. Группа Ли $\widetilde{G}$ называется *односвязной накрывающей* группы Ли G. **б)** Докажите, что ядро гомоморфизма $\widetilde{G} \to G$ есть дискретная группа, изоморфная $\pi_1(G)$. **в**)** Докажите, что для всякого гомоморфизма алгебр Ли $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ существует единственный гомоморфизм соответствующих односвязных групп Ли $\varphi : G_1 \to G_2$ такой, что $d_e\varphi = f$. *Указание:* в окрестности единицы такой гомоморфизм строится при помощи экспоненциального отображения. Далее, этот гомоморфизм можно продолжить на всю группу вдоль любого пути в группе и воспользоваться односвязностью для доказательства корректности. **г)** Докажите, что каждой алгебре Ли соответствует не более одной связной односвязной группы Ли с точностью до изоморфизма (на самом деле, ровно одна).

2. а) Докажите, что универсальная накрывающая группы Ли S^1 изоморфна $\mathbb{R}$. **б)** Докажите, что универсальная накрывающая группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$ изоморфна SU_2, и универсальное накрытие двулистно. **в*)** Докажите, что универсальная накрывающая группы Ли $SO_4(\mathbb{R})$ изоморфна $SU_2 \times SU_2$, и универсальное накрытие двулистно.

Представлением группы Ли называется гладкий гомоморфизм $G \to GL(V)$, где V – векторное пространство. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, где V – векторное пространство. Понятия гомоморфизма представлений, неприводимого представления, прямой суммы представлений и т.д. определяются обычным образом.

3. а) Докажите, что дифференциал гомоморфизма $G \to GL(V)$ в точке $e \in G$ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_eG$. **б)** Пользуясь задачей 1в, докажите, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вляется дифференциалом некоторого представления соответствующей связной односвязной группы Ли.

4. Опишите с точностью до изоморфизма все комплексные представления группы Ли **а)** $\mathbb{R}$; **б)** S^1. **в)** Какие из этих представлений неприводимы? неразложимы? вполне приводимы?

5. Докажите, что правое действие группы Ли G на себе переводит левоинвариантные векторные поля в левоинвариантные (и аналогично для правоинвариантных векторных полей и левого действия). *Указание:* левоинвариантные векторные поля являются полями скоростей правого действия.

Присоединенным представлением группы Ли G называется линейное действие группы Ли G на ее касательной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (т.е. гомоморфизм $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$), определяемое одним из следующих эквивалентных способов:

(1) как левое действие G на пространстве $\mathfrak{g}$ правоинвариантных векторных полей на G;
(2) как правое действие G на пространстве $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей на G;
(3) как дифференциал в точке $e \in G$ действия группы Ли G на себе сопряжениями (это действие сохраняет точку e, а следовательно задает действие на касательном пространстве $T_eG = \mathfrak{g}$).

Присоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется действие алгебры Ли на себе коммутаторами, т.е. гомоморфизм $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \mathrm{ad}\, x = [x, \cdot]$.

6. а) Докажите, что приведенные выше определения присоединенного представления эквивалентны. **б)** Докажите, что присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ получается из присоединенного представления соответствующей группы Ли G взятием дифференциала в единице. **б)** Докажите, что для линейной группы Ли (т.е. для произвольной подгруппы Ли G в группе $GL_n(\mathbb{R})$) присоединенное представление есть просто действие группы G сопряжениями на подпространстве $\mathfrak{g} \subset Mat_n(\mathbb{R})$.

Универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется пара $(U(\mathfrak{g}), \epsilon)$, где $U(\mathfrak{g})$ – ассоциативная алгебра с единицей, $\epsilon : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})^-$ – гомоморфизм алгебр Ли, обладающая следующим *универсальным свойством*: для любой ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \to A^-$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \to A$, такой, что $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \epsilon$.

7. а) Докажите, что универсальная обертывающая алгебра данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ единственна с точностью до изоморфизма. **б)** Докажите, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ однозначно продолжается до представления универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ (таким образом, теория представлений связной односвязной группы Ли, теория представлений ее алгебры Ли и теория представлений ее универсальной обертывающей алгебры – одно и то же).

8. Пусть $T(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \;\oplus\; \mathfrak{g} \;\oplus\; (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \;\oplus \dots$ – тензорная алгебра пространства $\mathfrak{g}$ (т.е. свободная ассоциативная алгебра, порожденная пространством $\mathfrak{g}$) и пусть $J \subset T(\mathfrak{g})$ – двусторонний идеал, порожденный элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ для всех элементов $x, y \in \mathfrak{g}$. Докажите, что ассоциативная алгебра $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$ с тождественным отображением $\epsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \subset T(\mathfrak{g})$ обладает требуемым универсальным свойством. *Указание:* иначе говоря, пусть $x_1, \dots x_n$ – базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и пусть $[x_i, x_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$. Надо доказать, что $U(\mathfrak{g})$ есть ассоциативная алгебра с образующими $x_1, \dots, x_n$ и определяющими соотношениями $x_i x_j - x_j x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$, причем $\epsilon(x_i) = x_i$.

9. а) Докажите, что универсальная обертывающая алгебра абелевой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть алгебра полиномов $S(\mathfrak{g})$. **б*)** Докажите, что универсальная обертывающая алгебра двумерной неабелевой алгебры Ли изоморфна подалгебре в алгебре дифференциальных операторов на прямой, порожденной операторами x и $x\frac{\partial}{\partial x}$.

10. Пусть $x_1, \dots, x_n$ базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Докажите, что мономы вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, где $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, образуют полную систему в векторном пространстве $U(\mathfrak{g})$.

Пусть D – дифференциальный оператор на многообразии M и $m \in M$. Значением оператора D в точке m назовем функционал $F(f) := D(f)(m)$ на пространстве гладких функций в окрестности точки m. Этот функционал, очевидно, однозначно определяется разложением функции в ряд Тейлора в точке m.

11. а) Докажите, что всякий левоинвариантный дифференциальный оператор на группе Ли G однозначно определяется своим значением в точке $e \in G$. **б)** Постройте сюръективный гомоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$ на алгебру левоинариантных дифференциальных операторов на группе G. *Указание:* вложите алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как левоинвариантные векторные поля и воспользуйтесь универсальным свойством $U(\mathfrak{g})$. **в)** Докажите, что этот гомоморфизм на самом деле является изоморфизмом. **г)** Докажите *теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта*: пусть $x_1, \dots, x_n$ базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, тогда мономы вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ образуют базис в векторном пространстве $U(\mathfrak{g})$.

12. Группа Ли G действует на многообразии M. Рассмотрим гладкое отображение $\varphi_m : G \to M$, переводящее $g \in G$ в $gm \in M$. Каждому элементу x алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_e G$ сопоставим векторное поле v_x на M такое, что $v_x(m) = d_e \varphi_m(x)$. **а)** Докажите, что поле скоростей любого семейства диффеоморфизмов действия группы G на M имеет вид v_x для некоторого $x \in \mathfrak{g}$. **б)** Докажите, что $x \mapsto v_x$ есть гомоморфизм алгебр Ли. **в)** Докажите, что этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ в алгебру дифференциальных операторов на M.

13*. Группа Ли $SL_2(\mathbb{C})$ действует дробно-линейными преобразованиями $\mathbb{CP}^1$. Получается гомоморфизм $U(\mathfrak{sl}_2)$ в алгебру голоморфных дифференциальных операторов на $\mathbb{CP}^1$. **а)** Опишите ядро этого гомоморфизма. **б)** Докажите, что этот гомоморфизм сюръективен.