Задачи по группам и алгебрам Ли – 2. Касательная алгебра Ли.

Для получения оценки “10” по данному листку 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Дедлайн 8 октября.

В этом листке G – связная подгруппа Ли в полной линейной группе $GL(V)$ конечномерного векторного пространства V. Касательное пространство в единице T_eG является подпространством в пространстве $\mathrm{End}(V)$ всех линейных операторов $V \to V$.

1. а) Пусть $x \in T_eG$ и $g(t) \in G$ – гладкий путь в группе G, касающийся x, т.е. такой что $g(0) = e$ и $\frac{d}{dt}|_{t=0}g(t) = x$. Докажите, что для любого $y \in \mathrm{End}(V)$ выполнено $\frac{d}{dt}|_{t=0}g(t)yg(t)^{-1} = xy - yx$. **б)** Докажите, что подпространство $T_eG \subset \mathrm{End}(V)$ замкнуто относительно операции $(x, y) \mapsto xy - yx$.

Операция $(x, y) \mapsto xy - yx$ называется *коммутатором* и обозначается $[x, y]$. Пространство T_eG с этой билинейной операцией называется *касательной алгеброй Ли* группы Ли G и обычно обозначается готической буквой $\mathfrak{g}$.

2. Найдите касательные алгебры следующих групп Ли **а)** SL_n; **б)** SO_n; **в)** группы верхнетреугольных матриц; **г)** SU_n.

3. а) Выпишите операцию коммутатора в касательной алгебре группы $SO_3(\mathbb{R})$ в каком-нибудь базисе. **б)** Тот же вопрос для группы строго верхнетреугольных 3×3-матриц. **в)** Тот же вопрос для группы SU_2.

4. Докажите, что операция коммутатора кососимметрична и удовлетворяет *тождеству Якоби*: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Алгеброй Ли называется векторное пространство с билинейной кососимметричной операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби.

5. а) Дайте определения подалгебры Ли, гомоморфизма алгебр Ли, изоморфизма алгебр Ли, идеала в алгебре Ли, факторалгебры Ли. Докажите теорему о гомоморфизме: образ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ пригомоморфизме $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{h}$, изоморфной фактору алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по ядру гомоморфизма. **б)** Опишите с точностью до изоморфизма все алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$ размерности не выше 2... **в*****)** ...не выше 3.

6. а) Докажите, что касательная алгебра подгруппы Ли является подалгеброй Ли, а нормальной подгруппы Ли – идеалом. **б)** Докажите, что дифференциал в единице гомоморфизма групп Ли является гомоморфизмом алгебр Ли. *Указание:* воспользуйтесь задачей 1а.

7***. а)** Какие из следующих групп Ли изоморфны: SU_2, $SO_3(\mathbb{R})$, $SL_2(\mathbb{R})$, $SO_{2,1}(\mathbb{R})$ (т.е. группа собственных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющих квадратичную форму сигнатуры $(2, 1)$)? **б)** Какие из касательных алгебр Ли групп из предыдущего пункта изоморфны?

8***.** Векторное поле на группе Ли G называется *левоинвариантным*, если оно сохраняется диффеоморфизмами умножения на любой элемент группы G слева. **а)** Докажите, что для любого $\xi \in T_eG$ существует единственное левоинвариантное векторное поле l_ξ на G, такое, что $l_\xi(e) = \xi$. *Указание:* разнесите касательный вектор $\xi \in T_eG$ в каждую точку при помощи левого действия группы на себе. **б)** Выпишите явно в глобальной координате левоинвариантные векторные поля на группе $GL_n(\mathbb{R})$. **в)** Пусть $\xi, \eta \in \mathfrak{g} = T_eG$. Докажите, что $[\xi, \eta] = -[l_\xi, l_\eta](e)$. **г)** Выразите коммутатор в касательной алгебре Ли через правоинвариантные векторные поля.

Замечание: предыдущая задача дает способ определить операцию коммутатора на касательном пространстве в единице к *любой* группе Ли, не обязательно линейной.

9. Для линейного оператора $x \in \mathrm{End}(V)$ определим его *экспоненту* как сумму ряда $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. **а)** Докажите, что этот ряд сходится для любого $x \in \mathrm{End}(V)$ и $\exp(x) \in GL(V)$. **б)** Докажите, что кривая $g(t) = \exp(tx)$ является интегральной кривой левоинвариантного векторного поля на группе Ли $GL(V)$, соответствующего x. **в)** Докажите, что $g(t) = \exp(tx)$ является *однопараметрической подгруппой*, т.е. $g(t_1 + t_2) = g(t_1)g(t_2)$. **г)** Докажите, что если $x \in T_eG = \mathfrak{g}$, то $\exp(x) \in G$. *Указание:* в пунктах в) и г) воспользуйтесь теоремой существования и единственности интегральной кривой векторного поля, проходящей через заданную неособую точку. **д)** Докажите, что *экспоненциальное отображение* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ дает диффеоморфизм некоторой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы в G, и найдите его дифференциал в нуле. **е*)** Докажите, что экспоненциальное отображение гладко, и найдите дифференциал экспоненциального отображения в точке $x \in \mathfrak{g}$.

10. а) Докажите, что экспоненциальное отображение функториально, т.е. для любого гомоморфизма групп Ли $\varphi : G_1 \to G_2$ имеем $\varphi \circ \exp = \exp \circ d_e\varphi$. *Указание:* имеет смысл снова воспользоваться теоремой существования и единственности интегральной кривой. **б)** Пусть $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ – гомоморфизм касательных алгебр Ли связных групп Ли G_1 и G_2. Докажите, что существует не более одного гомоморфизма групп Ли $\varphi : G_1 \to G_2$ такого, что $d_e\varphi = f$.

11*. Опишите все связные абелевы группы Ли с точностью до изоморфизма. *Указание:* покажите, что для абелевой группы Ли G экспоненциальное отображение является гомоморфизмом аддитивной группы $\mathfrak{g}$ на G.

12. Найдите область значений экспоненциального отображения для следующих групп Ли: **а)** $GL_n(\mathbb{R})$; **б)** $GL_n(\mathbb{C})$; **в)** $SO_n(\mathbb{R})$; **г)** группы Ли верхнетреугольных матриц над $\mathbb{R}$.

13. а) Напишите в виде ряда в окрестности единицы обратное отображение $\log : GL(V) \to \mathrm{End}(V)$ и найдите его область сходимости. **б)** Покажите, что формула $x{*}y := \log(\exp(x)\exp(y))$ задает ассоциативное умножение в некоторой окрестности нуля в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с операцией обращения $x \mapsto -x$ (это называется умножением в экспоненциальных координатах). **в**)** Докажите, что операция $x * y$ может быть выражена через операцию коммутатора в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (не используя матричного умножения) при помощи некоторого универсального ряда. *Указание:* формула, выражающая $x{*}y$ через коммутаторы, называется формулой (Бейкера)–Кэмпбелла–Хаусдорфа–(Дынкина). Ее доказательство не стыдно посмотреть в книжках.

14. а) Докажите, что для группы Ли строго верхнетреугольных матриц (т.е. с единицами на диагонали) экспоненциальное отображение взаимно однозначно, и ряд для логарифма сходится везде. **б)** Покажите, что для этой группы операция умножения в экспоненциальных координатах задается полиномиальными формулами.

15*. Пусть A – конечномерная алгебра (не обязательно ассоциативная). Докажите, что алгебра Ли $Der(A)$ дифференцирований алгебры A является касательной алгеброй группы Ли $Aut(A)$ автоморфизмов алгебры A.