Задача 8.1. Постройте биекцию $S^3/S^1 \cong S^2$, где S^3 — группа кватернионов единичной нормы, а S^1 — подгруппа, состоящая из комплексных чисел единичной нормы.

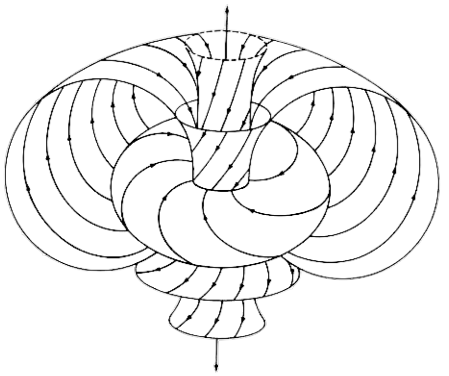
▷ Возникает отображение S^3 на S^2 со слоем (прообразом произвольной точки) S^1, называемое *расслоением Хопфа.*

Задача 8.2. Любые два слоя расслоения Хопфа имеют *коэффициент зацепления* 1: на произвольный слой расслоения Хопфа можно натянуть пленку, которую любой другой слой пересекает ровно в одной точке.

(Указание: в качестве одной такой пленки можно взять $\{a + bi + cj \mid c \in [0; 1]\}$.)

Задача 8.3. а) Постройте отображение S^{2n+1} на $\mathbb{C}P^n$ со слоем S^1.

б*) Постройте отображение S^7 на S^4 со слоем S^3 (указание: про S^4 нужно думать как про $\mathbb{H}P^1$).



Задача 8.4. а) Действие группы $SL(2;\mathbb{C})$ на *эрмитовых* ($a_{ij} = \bar{a}_{ji}$) матрицах 2×2 задает гомоморфизм $SL(2;\mathbb{C}) \to O(1,3)$ («спинорное отображение»).

б*) Найдите ядро и образ спинорного отображения.

(Напомним, что группа Лоренца $O(1,3)$ — это группа линейных преобразований четырехмерного пространства, сохраняющих норму $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.)

Задача 8.5. Куда при спинорном отображении переходит

а) группа $SU(2) \subset SL(2;\mathbb{C})$; б) группа $SL(2;\mathbb{R}) \subset SL(2;\mathbb{C})$?