НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 9.
Векторные поля и распределения. 9.11.2015.

Задача 1. Доказать, что если $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на многообразии M, то $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

Задача 2. Пусть U — диффеоморфная $\mathbb{R}^n$ область на гладком многообразии, а $X_1, \ldots, X_n$ — базис в векторных полях на U. Доказать, что если для любых i и j верно тождество $[X_i, X_j] = 0$, то существуют локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ такие, что $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Задача 3. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ гладкое отображение, X_M, Y_M векторные поля на M, а X_N, Y_N соответственно φ-связанные с ними векторные поля на N. Доказать, что тогда $[X_M, Y_M]$ и $[X_N, Y_N]$ тоже φ-связаны.

Задача 4. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ гладкое отображение, а X гладкое векторное поле на M, причём $d_x\varphi(X_x) = d_y\varphi(X_y)$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$. Обязательно ли существует гладкое векторное поле на N, φ-связанное с X?

Задача 5. Пусть $K \subset M$ — компактное подмножество в многообразии M. Докажите, что любая интегральная кривая либо продолжается на всю ось времени, либо выходит за пределы K.

Задача 6. Докажите, что любое гладкое векторное поле на компактном многообразии является полным.

Задача 7. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением $dz = ydx$. Нарисуйте это поле плоскостей. Докажите, что у него нет интегральной поверхности.

Задача 8. В пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$, z рассмотрим поле гиперплоскостей (называемое распределением Картана), заданное уравнением

$$dz = \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i.$$

Какова максимальная размерность интегрального подмногообразия?

Задача 9. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал форм на многообразии M, локально порожденный на области $U \subset M$ независимыми 1-формами $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Доказать, что $\mathcal{J}$ является дифференциальным идеалом тогда и только тогда, когда для формы $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$ существует такая 1-форма α, что $d\omega = \alpha \wedge \omega$.

Задача 10. (Лемма Картана). Пусть M многообразие размерности d, и $\omega_1, \ldots, \omega_p$, где $p \leqslant d$, — линейно независимые 1-формы на M. Пусть существуют такие 1-формы $\theta_1, \ldots, \theta_p$, на M, что

$$\sum_{i=1}^{p} \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$

Доказать, что существуют гладкие функции A_{ij} на M, такие, что $A_{ij} = A_{ji}$ и

$$\theta_i = \sum_{i=1}^{p} A_{ij}\omega_j, \quad i = 1, \ldots, p.$$