НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 2.
Гладкие многообразия. 14.09.2015.

Задача 1. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_3$, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

Задача 2. Множество k-плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

Задача 3. Множество ортонормированных k-реперов с началом в точке $(0, \ldots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что это гладкое многообразие. Найти размерность.

Задача 4. Чему диффеоморфны $V_1(\mathbb{R}^n)$ и $V_n(\mathbb{R}^n)$?

Задача 5. Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

Задача 6. Ввести структуру комплексно-аналитического многообразия на $\mathbb{CP}^n$.

Задача 7. Доказать, что как вещественное многообразие $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2$.

Задача 8. Доказать, что гладкое отображение $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ не может быть инъективным.

Задача 9. Может ли на ленте Мёбиуса существовать такая гладкая функция, что центральная окружность является регулярным прообразом некоторой точки?

Задача 10*. Доказать, что если $\psi : M \longrightarrow N$ гладкое инъективное и сюръективное отображение, которое невырождено в каждой точке, то ψ — диффеоморфизм (Указание: без второй аксиомы счётности не обойтись).