

## Листок 6. Представления $\mathfrak{S}_3$

▷ Во всех задачах, кроме задачи 2, все представления — над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

**Задача 6.1.** Все неприводимые представления конечной коммутативной группы одномерны.

**Задача 6.2.** Приведите пример представления, не являющегося вполне приводимым  
а) группы  $\mathbb{Z}$  над полем нулевой характеристики; б) конечной группы (над полем конечной характеристики).

**Задача 6.3.** Пусть  $\sigma = (12), \tau = (123) \in \mathfrak{S}_3$ ,  $W$  — некоторое представление группы  $\mathfrak{S}_3$ .

а) Если  $v \in W$  — собственный вектор для  $\tau$ , отвечающий собственному значению  $\omega$ , то вектор  $\sigma(v)$  также является собственным вектором для  $\tau$  с собственным значением  $\omega^2$ . Какие значения может принимать  $\omega$ ?

б) В условиях предыдущего пункта подпространство  $\langle v, \sigma(v) \rangle$  является подпредставлением группы  $\mathfrak{S}_3$  (таким образом, размерность всякого неприводимого представления  $\mathfrak{S}_3$  не превышает двух).

в) Опишите все неприводимые представления группы  $\mathfrak{S}_3$ .

**Задача 6.4.** Пусть  $R$  — регулярное представление  $\mathfrak{S}_3$ ,  $V$  — ее двумерное неприводимое представление.

а) Разложите  $R$  на неприводимые представления.

б)  $\text{Sym}^{k+6} V \cong \text{Sym}^k V \oplus R$ .

в) Разложите на неприводимые  $\text{Sym}^k V$  для всех  $k$ .

г)  $S^2(S^3V) = S^3(S^2V)$ .