

5

5.1. Приведите примеры категорий, в которых нет начальных объектов. Можно ли с их помощью построить категории, в которых нет конечных объектов?

5.2. Укажите начальные и конечные объекты в категориях $MON, GRP, AB; RING, ANN$. Введите категории *тел* и *полей* как *полные* подкатегории категорий $RING$ и ANN ; есть ли в них начальные объекты?

5.3. В каких из категорий $SET; MON, GRP, AB; RING, ANN$ определены прямые суммы? Прямые произведения?

5.4. Образуют ли *кольцо с композицией* рациональные функции с вещественными коэффициентами? Гладкие функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ вида $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n \in \mathbb{R}$ и ряды *сходятся* при всех $x \in \mathbb{R}$? Подразумеваются обычные определения сложения, умножения, дифференцирования и композиции функций.

5.5*. Сформулируйте аксиомы тернара \mathbf{T} с операцией

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T} : (a, x, b) \mapsto \underline{ax + b},$$

достаточные для того, чтобы на *плоскости* $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$, на которой *прямыми* будут названы графики отображений $x \mapsto \underline{ax + b}$ и *вертикальные прямые* $\{(x, y) \mid y \in \mathbf{T}\}$ для всех $x \in \mathbf{T}$, выполнялись (первая и пятая) аксиомы Евклида:

- *через любые две точки проходит прямая, причём единственная;*
- *через любую точку вне данной прямой проходит прямая, параллельная данной, причём единственная.*

Разумеется, *параллельными* называются непересекающиеся прямые. Проверьте, что, если \mathbf{T} – *тело* с операцией $\underline{ax + b} := ax + b$, то ваши аксиомы тернара выполняются.

5.6. Классифицируйте с точностью до изоморфизма группы из ≤ 4 элементов. Решена ли вами классификационная задача в категории AB ?

5.7. Представим ли забывающий функтор

$$\mathbf{forget} :: GRP \longrightarrow SET?$$

5.8*. Представим ли забывающий функтор

$$\mathbf{forget} :: RING \longrightarrow SET?$$

15 октября, Г.Б. Шабат