Независимый Московский Университет, Алгебра-1, осень 2015

4

4.1. Исследуйте *уравнение Сильвестра* $ax + xb = c$ над телом кватернионов $\mathbb{H}$. **Указание.** Введите $D := a^2 + a(b + \overline{b}) + b\overline{b}$ и вычислите Dx, учтя, что кватернионы вида $b + \overline{b}$ и $b\overline{b}$ коммутируют с любыми кватернионами.

4.2. Исследуйте системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными над *телом* (если угодно, кватернионов). Сформулируйте условие *невырожденности* системы. **Указание.** Повторите вычисления над полем, но используйте "метод подстановки": выразив одно из неизвестных через другое с помощью первого уравнения (в предположении отличия от нуля соответствующего коэффициента), затем подставьте его во второе. Проведите эти же вычисления над телом, заменяя каждое $\frac{p}{q}$ на pq^{-1} или на $q^{-1}p$.

4.3. Может ли квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ над телом кватернионов $\mathbb{H}$ иметь более двух корней? Бесконечно много корней?

4.4. Пользуясь обозначением $B^A := \mathrm{Mor}_{\mathcal{SET}}(A, B)$ для произвольных множеств A, B, предъявите биекции

$$\left(Z^Y\right)^X \cong Z^{Y\times X} \text{ и } (Z \times Y)^X \cong Z^X \times Y^X$$

для произвольных множеств X, Y, Z. Рассмотрите случаи, когда эти множества пусты, одноэлементны и двухэлементны.

4.5. Пусть $\mathcal{C}$ – одна из категорий $\mathcal{MON}$, $\mathcal{GRP}$, $\mathcal{AB}$, $\mathcal{RING}$, $\mathcal{ANN}$, а $*$ – операция или одна из двух операций на объектах этой категории. Попытаемся для объектов $X, Y \in\in \mathcal{C}$ ввести на множестве $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ операцию $\circledast$ по правилу $(\alpha \circledast \beta)(x) := \alpha(x) * \beta(x)$. В каких случаях эта попытка увенчается успехом?

4.6. Проверьте, что взятие *дополнения* определяет изоморфизм полуколец $(\mathrm{Sub}(\mathcal{U}); \bigcup, \bigcap; \varnothing, \mathcal{U})$ и $(\mathrm{Sub}(\mathcal{U}); \bigcap, \bigcup; \mathcal{U}, \varnothing)$.

4.7. Определите моноиды эндоморфизмов групп $\mathrm{End}_{\mathcal{GRP}}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{End}_{\mathcal{GRP}}(\mathbb{Q})$.

4.8. Определите группы автоморфизмов групп $\mathrm{Aut}_{\mathcal{GRP}}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{GRP}}(\mathbb{Q})$.

4.9. Определите моноиды эндоморфизмов колец $\mathrm{End}_{\mathcal{ANN}}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{End}_{\mathcal{ANN}}(\mathbb{Q})$.

4.10. Проверьте, что взятие комплексного сопряжения определяет автоморфизм поля $\mathbb{C}$.

4.11. Определяет ли взятие *кватернионного* сопряжения автоморфизм тела $\mathbb{H}$? Введите понятие *антиавтоморфизма* тела и примените его к кватернионному сопряжению.

8 октября, *Г.Б. Шабат*