

1

1.1. Приведите три примера невырожденных систем двух линейных уравнений с целыми с двумя неизвестными, в которых и коэффициенты, и решения целы. Постройте графические решения этих систем на клетчатой бумаге.

1.2. Выведите формулы для решений систем трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, аналогичные формулам для систем двух уравнений с двумя неизвестными. Что представляет собой условие невырожденности?

1.3. Перечислите свойства сложения и умножения, использовавшиеся при решении систем линейных уравнений.

1.4*. Найдя a, b, c, d, e, f , при которых выполняется тождество

$$f(x) := \frac{1}{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{x+2} + \frac{f}{x+3},$$

вычислите $I := \int_{1/3}^{1/2} f(x)dx$ и разложите e^{240I} на простые множители.

1.5*. Вычислите $1^5 + 2^5 + \dots + 2015^5$. **Указание.** Введите функции $S_k(n) := 1^k + 2^k + \dots + n^k$ и докажите, что S_k – многочлен степени $k+1$. Вычислите S_0, S_1, S_2, \dots – сначала решив системы линейных уравнений, а затем сравнив S_k с производными S'_{k+1} .

1.6. Приведите несколько примеров редуцированных кубических уравнений с целыми коэффициентами и тремя разными *целыми* решениями. Находятся ли эти решения по формуле Кардано?

1.7. Приведите несколько примеров редуцированных кубических уравнений с целыми коэффициентами и единственным вещественным решением, которое к тому же *цело*. Находится ли это решение по формуле Кардано?

1.8. Найдите такой кубический многочлен f , что $f(1) = 7868$, $f(2) = 29891$, $f(3) = 80076$ и $f(4) = 170513$.

1.9. Доказав, что при любом целом n функция $x \mapsto \cos(nx)$ есть многочлен от $\cos x$ (эти многочлены называются *многочленами Чебышёва*), вычислите $\cos \frac{\pi}{16}$, $\cos \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{12}$.

1.10. Перечислите свойства сложения и умножения, использовавшиеся при выводе формулы Кардано.

1.11*. Постройте кубический многочлен с целыми коэффициентами, корни которого – $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ и $\cos \frac{6\pi}{7}$.

1.12.** Какие ещё числа вида $\cos(r\pi)$, где r – рациональное число, являются корнями квадратных или кубических многочленов с целыми коэффициентами?

1.13*. Сведите задачу построения треугольника по трём биссектрисам к решению кубического уравнения. Приведите численные примеры.

17 сентября, Г.Б. Шабат