Геометрия: листок 7. Движения в геометрии Лобачевского (20 октября 2014)

Задача 1. Докажите, что любое движение плоскости Лобачевского можно представить в виде композиции не более чем трёх симметрий относительно прямых.

Задача 2. Докажите, что собственное движение плоскости Лобачевского имеет либо одну неподвижную точку (*эллиптическое движение*), либо одну неподвижную точку на абсолюте (*параболическое движение*), либо две неподвижных точки на абсолюте (*гиперболическое движение*).

Задача 3. Докажите, что эллиптическое движение — композиция двух симметрий относительно пересекающихся прямых, параболическое движение — композиция двух симметрий относительно прямых, пересекающихся на абсолюте, гиперболическое движение — композиция двух симметрий относительно непересекающихся прямых.

В геометрии Лобачевского *эллиптическим пучком* называют семейство прямых, имеющих общую точку, *параболическим пучком* — семейство прямых, имеющих общую точку на абсолюте, *гиперболическим пучком* — семейство прямых, продолжения которых в модели Клейна имеют общую точку за пределами абсолюта.

Задача 4. а) Докажите, что две прямые, имеющие общий перпендикуляр, являются расходящимися (т.е. не имеют общих точек ни в самой геометрии Лобачевского, ни на абсолюте).

б) Докажите, что две расходящиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр.

Задача 5. Докажите, что существует прямая, ортогональная всем прямым гиперболического пучка.

Задача 6. Докажите, что любые две параллельные (т.е. пересекающиеся на абсолюте) прямые движением можно перевести в любые две параллельные прямые.

Связная кривая, ортогональная всем прямым одного эллиптического пучка, называется *окружностью*; всем прямым параболического пучка — *орициклом*, всем прямым гиперболического пучка — *эквидистантой* (определение эквидистанты уточняется после задачи 7).

Задача 7. Докажите, что эквидистанта состоит из точек, равноудалённых от точек прямой, ортогональной всем прямым гиперболического пучка.

Уточнение: в дальнейшем эквидистантой мы будем называть множество всех точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние, отличное от нуля (т.е. эквидистанта состоит из двух связных компонент).

Задача 8. Докажите, что любые два орицикла можно совместить движением.

Задача 9. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат одному пучку прямых.

Задача 10. Докажите, что вершины любого треугольника лежат либо на одной окружности, либо на одном орицикле, либо на одной эквидистанте

Задача 11. Докажите, что высоты треугольника принадлежат одному пучку прямых.