

Дивизоры

В этом листке X обозначает гладкую проективную кривую над алгебраически замкнутым полем k .

Задача 1. Какие из следующих семейств дивизоров являются линейными системами?

a) $\{P + Q \mid P \neq Q \in X\}$;

b) $\{2P \mid P \in X\}$;

c) $\{D \mid D - D_0 \in \mathcal{M}\}$, где $D_0 \geq 0$ — фиксированный дивизор, а \mathcal{M} — некоторая линейная система;

d) $\{D_1 + D_2 \mid D_i \in \mathcal{M}_i\}$, где \mathcal{M}_i — линейные системы;

Задача 2. Приведите пример проективного вложения кривой, при котором линейная система гиперплоских сечений не полная.

Задача 3. Опишите линейные системы размерности 1 дивизоров степени 3 на \mathbb{P}^1 . А именно, укажите, сколько и каких «особенных» дивизоров с коэффициентами > 1 в них может быть.

Задача 4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — кубическая неособая кривая, заданная в аффинной карте уравнением $y^2 = x^3 + px + q$. Опишите линейные системы прообразов точек при следующих отображениях $X \rightarrow \mathbb{P}^1$:

a) проекция на ось x ;

b) проекция на ось y ;

c) проекция на бесконечно удалённую прямую из точки $(0, 0)$.

Укажите, сколько и каких «особенных» дивизоров в них может быть.

Задача 5. а) Пусть для некоторой точки $P \in X$ для всех дивизоров $D = \sum a_R \cdot R$ из линейной системы \mathcal{M} верно: $a_P = 0$ или $a_P \geq 2$. Покажите, что $\phi_{\mathcal{M}}$ — не вложение.

б) Пусть для некоторой пары точек $P, Q \in X$ для всех дивизоров $D = \sum a_R \cdot R$ из линейной системы \mathcal{M} верно: $a_P = 0 \iff a_Q = 0$. Покажите, что $\phi_{\mathcal{M}}$ не инъективно.

с*) Если \mathcal{M} — линейная система без базисных точек на кривой X и ситуаций из двух предыдущих пунктов не возникает, то отображение $\phi_{\mathcal{M}}$ — вложение.