Алгебраическая геометрия 1

10.10.2014
Листок 5

Квадрики

Поле k в этом листке считается алгебраически замкнутым характеристики ноль.
Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — гиперповерхность, заданная уравнением $f(x) = 0$, где $f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Точка $P \in X$ называется *неособой*, если

$$df(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right) \neq 0.$$

Точка гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ называется *неособой*, если она неособа в какой-нибудь аффинной карте. Гиперповерхность X называется *неособой*, если все её точки неособы.

Задача 1. Пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ задана уравнением $F(x) = 0$, где многочлен $F \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ однородный. Покажите, что точка $P \in X$ неособа $\iff$ $dF(P) \neq 0$.

Задача 2. a) Покажите, что множество особых точек гиперповерхности X — замкнутое подмножество в X.

b) Пусть f неприводим. Тогда на X существуют неособые точки.

c) Пусть X — приводимая гиперповерхность $\cup X_i$, где $X_i = V(f_i)$, и $P \in X_1 \cap X_2$. Тогда P — особая точка X.

Квадрикой называется проективная поверхность степени 2, т.е. множество нулей однородного многочлена $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ степени 2 в $\mathbb{P}^3$. *Рангом* квадрики называется ранг квадратичной формы F.

Задача 3. Покажите, что квадрика является двойной плоскостью (ранг 1), парой плоскостей (ранг 2), проективизацией конуса над коникой в $\mathbb{A}^3$ (ранг 3) или неособой поверхностью (ранг 4). При этом квадрика определяется рангом с точностью до изоморфизма. Квадрика ранга 4 называется *неособой квадрикой*.

Задача 4. a°) Покажите, что неособая квадрика изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Подсказка: вспомните, что $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ изоморфно квадрике.

b) Покажите, что неособая квадрика неизоморфна $\mathbb{P}^2$.

Задача 5. a) Покажите, что на неособой квадрике есть два семейства прямых в $\mathbb{P}^3$, причём прямые из разных семейств пересекаются, а из одного – нет.

b) Покажите, что других прямых на квадрике нет.

c°) Опишите пересечение неособой квадрики с касательной плоскостью к ней.

d) Покажите, что прямая на неособой квадрике не может быть задана одним дополнительным полиномиальным уравнением.

e) Опишите образ диагонали $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ при вложении Сегре. Какова его степень?

Задача 6*. Пусть P – точка на неособой квадрике Q, а $\widetilde{Q}$ – строгий прообраз Q при раздутии точки P. Докажите, что проекция из точки P задаёт регулярное отображение $\widetilde{Q} \to \mathbb{P}^2$, которое является раздутием двух точек на $\mathbb{P}^2$.

Задача 7. Пусть Q – квадрика ранга 3.

a) Опишите все прямые на Q.

b) Покажите, что прямая на Q может быть задана одним дополнительным уравнением.

c^*) Пусть $Q_0 \subset \mathbb{A}^3$ – аффинный конус над неособой коникой. Покажите, что идеал прямой на Q_0 в $\mathsf{k}[Q_0]$ не может быть порождён одним многочленом.

Задача 8*. Пусть P – особая точка на квадрике Q ранга 3, а $\widetilde{Q}$ – строгий прообраз Q при раздутии точки P. a) Докажите, что прообраз P на $\widetilde{Q}$ – это коника в $\mathbb{P}^2$.

b) Покажите, что проекция из точки P задаёт регулярное отображение $\widetilde{Q} \to \mathbb{P}^2$, образ которого – коника, а слои которого – проективные прямые.

c) Изоморфны ли $\widetilde{Q}$ и $\mathbb{P}^2$? $\widetilde{Q}$ и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$?