Алгебраическая геометрия 1

12.09.2014
Листок 1

Первый листок

Задача 1. Задайте алгебраическими уравнениями и нарисуйте кривые, заданные параметрически:
a) $x = \sin(t), y = \sin(2t)$;
b) $x = t^2 + 1, y = (t+1)^2$;
и кривую, заданную в полярных координатах:
c°) $r = \sin(2\phi)$.

Задача 2. Разложите следующие алгебраические подмножества в $\mathbb{A}^2$ на неприводимые компоненты над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$:
a°) $V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3)$;
b) $V(y^2 - xy - x^2y + x^3)$;
c) $V(x^3 + x - x^2y - y)$;
d°) $V(y^2 - x(x^2-1))$.

Пусть A — кольцо с однозначным разложением на простые множители, а F — его поле частных. *Содержанием* многочлена $P(x) \in A[x]$ называется наибольший общий делитель коэффицентов P. Обозначение: $C(P)$.

Задача 3 (лемма Гаусса). Пусть $P(x), Q(x) \in A[x]$. Докажите, что
a) Если $C(P) = C(Q) = 1$, то $C(PQ) = 1$.
b) Вообще говоря, $C(PQ) = C(P)C(Q)$.

Задача 4. Пусть $P(x), Q(x) \in A[x]$. Докажите, что
a) Если $P \vdots Q$ в $F[x]$ и $C(Q) = 1$, то $P \vdots Q$ в $A[x]$.
b) Если $P(X)$ неприводим в $A[x]$, то он неприводим и в $F[x]$. Верно ли обратное?

Задача 5. a) Пусть в коммутативном кольце A любой идеал порождён конечным числом элементов. Покажите, что и в $A[x]$ любой идеал порождён конечным числом элементов.
Подсказка: рассмотрите идеал в A, состоящий из старших коэффициентов всех многочленов из данного идеала в $A[x]$.
b) [Теорема Гильберта о базисе] Покажите, что любой идеал в $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ порождён конечным числом многочленов.

Задача 6. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ — алгебраические подмножества. Постройте алгебраические подмножества:
a°) $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$;
b°) $X \bigsqcup Y \subset \mathbb{A}^{\max(n,m)+1}$.