Алгебраическая геометрия 1

24.10.2014
Лекция 7

Особые и неособые точки

В прошлый раз мы определили локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ точки x на многообразии X. Сегодня с его помощью мы изучим локальные свойства многообразия в случае кривой.

Напомним, что кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ локально, т.е. имеет единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}_x$. Он состоит из функций, равных нулю в точке x.

Определение 1. Точка P плоской аффинной кривой X, заданной неприводимым уравнением $f(x,y)=0$, называется *неособой* или *гладкой*, если

$$\left(\frac{df}{dx}(P), \frac{df}{dy}(P)\right) \neq (0,0).$$

В противном случае точка P назвыается *особой*.

Замечание 2. В случае $\mathsf{k}=\mathbb{R}$ теорема о неявной функции из матанализа говорит, что в окрестности неособой точки P кривая X есть график некоторой гладкой функции $y(x)$ или $x(y)$, иными словами, изоморна интервалу на прямой. В алгебраической ситуации всё намного интереснее.

Предложение 3. *Точка P плоской аффинной кривой X, заданной неприводимым уравнением $f(x,y)=0$, неособа $\iff$ идеал $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$ главный, т.е. порождён одним элементом.*

Доказательство. Пусть P неособа. Можно считать, что $P=(0,0)$ и $\frac{df}{dy}(P)\neq 0$. Запишем $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y)=ax+by+f_2+\ldots+f_n,$$

где f_i — однородные слагаемые степени i и $b\neq 0$. Очевидно, что $\mathfrak{m}_P=(\bar{x},\bar{y})$, покажем, что $\bar{y}\in(\bar{x})$ в $\mathcal{O}_{X,P}$. В выражении $f(\bar{x},\bar{y})=0$ сгруппируем все члены, содержащие $\bar{x}$, в одну группу, и остальные, зависящие только от $\bar{y}$, в другую. Получим

$$\bar{x}(a+p(\bar{x},\bar{y}))+\bar{y}(b+q(\bar{y}))=0,$$

где $p(\bar{x},\bar{y}))$ и $q(\bar{y})$ лежат в $\mathfrak{m}_P$. Так как $(b+q(\bar{y}))(P)=b\neq 0$, элемент $b+q(\bar{y})$ обратим в $\mathcal{O}_{X,P}$, имеем

$$\bar{y}=-\frac{p(\bar{x},\bar{y})}{b+q(\bar{y})}\cdot\bar{x},$$

ч.т.д.

Пусть P особа. Тогда $f(x,y)=f_2+\ldots+f_n$, где f_i — однородные слагаемые степени i. Выберем порождающий элемент g в $\mathfrak{m}_P$, можно считать, что $g=\overline{g(x,y)}$, где $g(x,y)=cx+dy+\ldots\in\mathsf{k}[x,y]$. Тогда $\bar{x}=g\cdot h_1, \bar{y}=g\cdot h_2$ для некоторых $h_1,h_2\in\mathcal{O}_{X,P}$. Пусть $h_i=\overline{p_i/q_i}$, где p_i,q_i — многочлены. Тогда $x\cdot q_1=g\cdot p_1 \mod f$ и $y\cdot q_2=g\cdot p_2 \mod f$. Рассматривая члены степени 1 (а у многочлена f их нет), получим, что $x\sim cx+dy$ и $y\sim cx+dy$. Противоречие. $\square$

Свойство максимального идеала в локальном кольце неособой точки на плоской кривой быть порождённым одним элементом берётся за определение неособой точки в случае произвольной, не обязательно плоской, кривой. Впрочем, есть и много других определений:

Предложение 4. *Пусть $P \in X$ — точка на кривой. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *идеал $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$ главный;*
2. *все идеалы кольца $\mathcal{O}_{X,P}$ главные;*
3. *$\exists t \in \mathcal{O}_{X,P}$, такой что все идеалы кольца $\mathcal{O}_{X,P}$ имеют вид (t^n) или (0);*
4. *$\exists t \in \mathcal{O}_{X,P}$, такой что все элементы кольца $\mathcal{O}_{X,P}$ единственным образом представляются в виде $t^n \cdot u$, где элемент $u \in \mathcal{O}_{X,P}$ обратим;*
5. *векторное пространство $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ над k одномерно.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 4$. Выберем образующий элемент $t \in \mathfrak{m}_P$. Пусть $g \in \mathcal{O}_{X,P}$ — элемент. Если $g \notin \mathfrak{m}_P$, то g обратим, берём $n = 0$ и всё доказано. Если $g \in \mathfrak{m}_P$, то $g = tg_1$ при некотором $g_1 \in \mathcal{O}_{X,P}$. Если $g_1 \notin \mathfrak{m}_P$, то g_1 обратим, берём $n = 1$ и всё доказано. Если $g_1 \in \mathfrak{m}_P$, то $g_1 = tg_2$ при некотором $g_2 \in \mathcal{O}_{X,P}$, и так далее. Если этот процесс оборвётся, то мы получим требуемое представление и всё доказано. Иначе мы получим строго возрастающую последовательность

$$(g_1) \subset (g_2) \subset (g_3) \subset \dots$$

идеалов кольца $\mathcal{O}_{X,P}$, что противоречит его нётеровости. Последовательность действительно строго возрастает, так как $g_{m+1} \notin (g_m)$: иначе бы из равенства $g_m = tg_{m+1}$ выходило, что t обратим.

$4 \Rightarrow 3$. Пусть $I \subset \mathcal{O}_{X,P}$ — ненулевой идеал. Рассмотрим для всех элементов $a \in I$ представление $a = t^n \cdot u$. Пусть N — минимальное встретившееся значение n. Тогда $I = (t^N)$, что легко проверить.

$3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Очевидно.

$1 \Rightarrow 5$. Пусть $(t) = \mathfrak{m}_P$, покажем, что $\bar{t}$ порождает векторное пространство $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. Пусть $f \in \mathfrak{m}_P$, тогда $f = t \cdot g$, где $g \in \mathcal{O}_{X,P}$. Запишем $g = g(P) + h$, где $h \in \mathfrak{m}_P$, следовательно $f = tg(P) + th$. Переходя к фактору по $\mathfrak{m}_P^2$, получим $\bar{f} = g(P) \cdot \bar{t}$. Значит, $\bar{t}$ — базис $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

$5 \Rightarrow 1$. Доказывается при помощи леммы Накаямы для модулей над локальными кольцами, мы это рассуждение пропустим. □

Замечание 5. Отметим, что свойство 4 означает, что в кольце $\mathcal{O}_{X,P}$ имеется однозначное разложение на простые множители, причём простой элемент только один (с точностью до умножения на обратимые).

Определение 6. Точка P кривой X называется *неособой*, если для локального кольца $\mathcal{O}_{X,P}$ выполнены равносильные свойства предложения 4.

Определение 7. Элемент t из свойств 3 и 4 предложения 4 называется *локальным параметром* (или *униформизующим параметром*, или *локальной координатой*) в неособой точке кривой. Из доказательств следует, что в качестве локального параметра можно брать любой порождающий элемент идеала $\mathfrak{m}_P$.

Определение 8. *Нормированием* кольца A называется отображение $\nu\colon A \setminus 0 \to \mathbb{Z}$, обладающее следующими свойствами:

1. $\exists a \in A\ \nu(a) = 1$,
2. $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,
3. $\nu(a+b) \geqslant \min(\nu(a), \nu(b))$.

Замечание 9. Для любого нормирования имеем $\nu(1) = 0$, это следует из свойства 2.

Пример 10. Пусть $A = \mathsf{k}[x]$, $a \in \mathsf{k}$. Определим нормирование ν_a следующим образом: положим $\nu_a(f)$ равным кратности корня a многочлена f.

Пример 11. Пусть $A = \mathsf{k}(x)$, $a \in \mathsf{k}$. Определим нормирование ν_a следующим образом: положим $\nu_a(f/g)$ равным $\nu_a(f) - \nu_a(g)$, если $f, g \in \mathsf{k}[x]$. Ясно, что разность не зависит от выбора дроби.

Пример 12. Пусть $A = \mathbb{Z}$, p — простое число. Положим $\nu_p(n)$ равным степени p в разложении n на простые множители, получим нормирование.

Определение 13. Пусть ν — нормирование поля F. Положим

$$\mathcal{O}_\nu = \{f \in F \mid \nu(f) \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{m}_\nu = \{f \in F \mid \nu(f) > 0\}.$$

Предложение 14.
1. *Все элементы $f \in \mathcal{O}_\nu$ с $\nu(f) = 0$ обратимы в $\mathcal{O}_\nu$.*
2. *Множество $\mathcal{O}_\nu$ является локальным подкольцом в F, а $\mathfrak{m}_\nu$ — его единственным максимальным идеалом.*
3. *Поле F есть поле частных кольца $\mathcal{O}_\nu$.*

Доказательство.
1. Если $\nu(f) = 0$, то $\nu(f^{-1}) = 0$, следовательно $f^{-1} \in \mathcal{O}_\nu$ и f обратим в $\mathcal{O}_\nu$.
2. Если $\nu(a), \nu(b) \geqslant 0$, то из определения сразу следует, что $\nu(ab), \nu(a+b) \geqslant 0$. Кроме того, $\nu(1) \geqslant 0$, значит, $\mathcal{O}_\nu$ — кольцо. Также, если $\nu(a), \nu(b) > 0$, то $\nu(a+b) > 0$ и если $\nu(a) > 0, \nu(c) \geqslant 0$, то $\nu(ac) > 0$. Значит, $\mathfrak{m}_\nu$ — идеал. То, что он максимальный и единственный, следует из пункта 1.
3. Пусть $f \in F, f \neq 0$. Если $\nu(f) \geqslant 0$, то $f \in \mathcal{O}_\nu$, значит $f = f/1 \in \operatorname{Frac}(\mathcal{O}_\nu)$. Если же $\nu(f) < 0$, то $\nu(f^{-1}) > 0, f^{-1} \in \mathcal{O}_\nu$, и $f = 1/f^{-1} \in \operatorname{Frac}(\mathcal{O}_\nu)$.

$\square$

Определение 15. Кольцо $\mathcal{O}_\nu$, связанное с нормированием поля F, наывается *кольцом нормирования ν.*

Предложение 16. *Пусть $P \in X$ — точка на неприводимой кривой. Тогда P неособа $\iff$ кольцо $\mathcal{O}_{X,P}$ является кольцом некоторого нормирования ν поля $\mathsf{k}(X)$.*

Доказательство. Пусть P неособа и t — локальный параметр. Представим любой элемент $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ в виде $t^n \cdot u$, где u обратим, и положим $\nu_P(f) = n$. А для элемента f поля $\mathsf{k}(X)$ представим f в виде f_1/f_2, где $f_i \in \mathcal{O}_{X,P}$, и положим $\nu_P(f) = \nu_P(f_1) - \nu_P(f_2)$. Нетрудно проверить, что эти определения корректны и получается нормирование поля $\mathsf{k}(X)$. Более того, если $\nu_P(f) \geqslant 0$, то запишем $f = f_1/f_2$ как выше, и получим, что $f_1 = t^n \cdot u$, $f_2 = t^m \cdot w$, причём $n - m \geqslant 0$. Значит, $f = t^{n-m}uw^{-1} \in \mathcal{O}_{X,P}$. Следовательно, $\mathcal{O}_{X,P}$ является кольцом нормирования для ν_P.

Пусть $\mathcal{O}_{X,P}$ — кольцо некоторого нормирования ν поля $\mathsf{k}(X)$. Тогда максимальный идеал $\mathfrak{m}_P$ главный, что вытекает из следующей леммы. □

Лемма 17. *Пусть $\mathcal{O}_\nu$ — кольцо нормирования ν поля F. Тогда идеал $\mathfrak{m}_\nu \subset \mathcal{O}_\nu$ главный.*

Доказательство. Пусть $t \in F$ — элемент с нормой 1. Тогда $t \in \mathfrak{m}_\nu$. Покажем, что t порождает $\mathfrak{m}_\nu$. Пусть $a \in \mathfrak{m}_\nu$ и $b = at^{-1}$, тогда $\nu(b) = \nu(a) - \nu(t) \geqslant 0$, значит $b \in \mathcal{O}_\nu$. Поэтому $a = bt \in \mathfrak{m}_\nu$. □

Определение 18. Кольцо называется *кольцом дискретного нормирования*, если оно есть кольцо некоторого нормирования своего поля частных.

Таким образом, локальное кольцо неособой точки на кривой — это кольцо дискретного нормирования.

Замечание 19. В действительности, каждое из условий 1-5 предложения 4 равносильны свойству быть кольцом дискретного нормирования для любого локального нётерова кольца размерности 1.

Пример 20. Пусть X — аффинная плоская кривая, заданная уравнением $y^2 - x^3$, и $P = (0,0)$. Тогда точка P особая. Идеал $\mathfrak{m}_P$ в $\mathcal{O}_{X,P}$ порождён $\bar{x}$ и $\bar{y}$, но они не могут быть выражены друг через друга. Размерность пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ равна 2. В кольце $\mathcal{O}_{X,P}$ нет однозначного разложения на множители: иначе бы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ были кратными общего делителя, но они неразложимы в $\mathcal{O}_{X,P}$. У кольца $\mathcal{O}_{X,P}$ есть нормирование, заданное правилом $\nu(\bar{x}) = 2$, $\nu(\bar{y}) = 3$, но это нормирование не принимает значение 1, т.е. не годится.

Теперь обратимся к неособым точкам на кривой. Пусть t — локальный параметр в неособой точке P на X. С его помощью можно с любой точностью приблизить рациональные функции около точки P:

Предложение 21. *Пусть $f \in \mathcal{O}_{X,P}$. Для любого $n \geqslant 0$ $\exists!$ $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathsf{k}$, что*

$$f = p_0 + p_1 t + \ldots p_n t^n + g_{n+1},$$

где $g_{n+1} \in \mathfrak{m}_P^{n+1}$.

Доказательство. Докажем существование по индукции по n. При $n = 0$ имеем $f = f(P) + (f - f(P))$, где $f(P) \in \mathsf{k}$ и $f - f(P) \in \mathfrak{m}_P$.

Пусть дано разложение $f = p_0 + p_1 t + \ldots p_{n-1}t^{n-1} + g_n$, где $g_n \in \mathfrak{m}_P^n$. По предложению 4 можно записать $g_n = t^n \cdot u$. Затем представим u в виде $u = p_n + u_1$, где $p_n \in \mathsf{k}, u_1 \in \mathfrak{m}_P$. Получим $f = p_0 + p_1 t + \ldots p_{n-1}t^{n-1} + p_n t^n + u_1 t^n$. При этом $u_1 t^n \in \mathfrak{m}_P^{n+1}$.

Единственность приближения очевидна. □

Приближающий функцию f многочлен $p(t)$ называется *многочленом Тейлора*. Все многочлены Тейлора разных степеней суть начальные куски *ряда Тейлора*, по которому функция восстанавливается однозначно. Получаем вложение $\mathcal{O}_{X,P} \to \mathsf{k}[[t]]$ локального кольца кривой в точке P в кольцо формальных степенных рядов. Это вложение согласовано со сложением и умножением. Оно, конечно, зависит от выбора локального параметра.

Замечание 22. Вложение Тейлора не сюръективно, оно даёт очень малую часть рядов. Не следует думать, что оно позволяет отождествить локальные кольца неособых точек на разных кривых: множества рядов Тейлора для разных точек будут разными подмножествами в степенных рядах.

Вынося за скобку подходящую отрицательную степень локального параметра t, можно получить разложение любой (не обязательно регулярной в P) рациональной функции в окрестности точки P в ряд Лорана вида $\sum_{i=-N}^{\infty} p_i t^i$. Это даёт вложение поля $\mathsf{k}(X)$ в поле рядов Лорана $\mathsf{k}((t))$.

Завершим лекцию следующим замечанием.

Замечание 23. Максимальный идеал неособой точки аффинной кривой X в кольце регулярных функций $\mathsf{k}[X]$ не обязан быть главным. Например, идеал точки на неособой кубической кривой в $\mathbb{A}^2$ почти никогда не бывает главным, в чём мы сможем убедимся позже.