Регулярные функции и отображения

Вернёмся к алгебраическим подмножествам проективного пространства.

Предложение 1. *Подмножество $X \subset \mathbb{P}^n$ алгебраично $\iff$ все пересечения $X \cap U_i$ алгебраичны в $\mathbb{A}^n$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Если X есть множество нулей однородных многочленов $F_\alpha(x_0, \ldots, x_n)$, то по предложению 13.1 прошлой лекции $X \cap U_0$ — множество нулей многочленов $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = F_\alpha(1, x_1, \ldots, x_n)$.

$\Leftarrow$. Пусть теперь для множества $X \subset \mathbb{P}^n$ все пересечения $X \cap U_i$ алгебраичны. Тогда

$$X = \bigcap_i \left(\overline{X \cap U_i} \cup (\mathbb{P}^n \setminus U_i)\right)$$

и поэтому X алгебраично как пересечение алгебраичных. □

Одно из многих преимуществ проективного пространства перед аффинным — оно содержит все нужные пересечения. Например, на проективной плоскости любые две прямые пересекаются, а на аффинной — нет.

Определение 2. *Проективным подпространством* проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ называется его подмножество вида $\mathbb{P}(U)$, где $U \subset V$ — векторное подпространство. Алгебраически проективное подпространство в $\mathbb{P}^n$ задаётся несколькими линейными уравнениями.

Предложение 3. *Если $X, Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ — проективные подпространства и $\dim X + \dim Y \geqslant n$, то $X \cap Y$ — проективное подпространство размерности $\geqslant \dim X + \dim Y - n$.*

Доказательство. Линейная алгебра. □

Верен и более общий факт, который мы доказывать не будем:

Предложение 4. *Пусть поле k алгебраически замкнуто. Если $X, Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ — алгебраические подмножества и $\dim X + \dim Y \geqslant n$, то $X \cap Y$ непусто.*

Как мы видели, проективные алгебраические множества покрываются аффинными. Это должно напоминать то, как гладкие многообразия склеиваются из n-мерных дисков. Для того, чтобы грамотно говорить о подобных вещах, нужно ввести на алгебраических множествах топологию и определить класс хороших функций, служащих функциями перехода между координатами на разных кусках. Напомним

Определение 5. Топология на множестве X — это семейство подмножеств X, которые называют открытыми, для которого выполнены свойства:

1. $\emptyset$ и X открыты;

2. A, B открыты $\Rightarrow A \cap B$ открыто;

3. все множества из произвольного набора $A_t, t \in T$ открыты $\Rightarrow \cup_{t \in T} A_t$ открыто.

Дополнение до открытого множества называется *замкнутым*. *Окрестностью* точки $x \in X$ называется любое открытое множество, содержащее x.

Топологию можно задавать, фиксируя класс замкнутых, а не открытых множеств. Он должен удовлетворять двойственным свойствам:

1. $\emptyset$ и X замкнуты;

2. A, B замкнуты $\Rightarrow A \cup B$ замкнуто;

3. все множества из произвольного набора $A_t, t \in T$ замкнуты $\Rightarrow \cap_{t\in T} A_t$ замкнуто.

Введём на алгебраическом подмножестве V аффинного или проективного пространства *топологию Зарисского* — назовём *замкнутыми* подмножествами V всевозможные алгебраические подмножества V, а *открытыми* — их дополнения до V. Из леммы с прошлой лекции (с бесконечными пересечениями) следует, что это действительно топология.

Таким образом, можно сказать, что у алгебраического подмножества в проективном пространстве есть покрытие из открытых аффинных подмножеств. Также можно сказать, что у любой точки алгебраического подмножества в проективном пространстве есть аффинная окрестность.

Базис топологии Зарисского на $X \subset \mathbb{A}^n$ образуют множества $X_f\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}, f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ (также используется обозначение $D(f)$). По определению базиса топологии, это означает, что любое открытое $U \subset X$ есть объединение некоторого числа таких множеств. Действительно, любое открытое подмножество $U \subset X$ есть дополнение до множества нулей некоторого набора многочленов f_α. Тогда $U = \cup X_{f_\alpha}$.

Пример 6. Замкнутые подмножества аффинной прямой — это конечные подмножества или вся прямая. Соответственно, открытые подмножества — это пустое или вся прямая, кроме конечного множества точек. Окрестность точки $P \in \mathbb{A}^1$ — это множество, полученное удалением из $\mathbb{A}^n$ конечного числа точек, отличных от P.

Пример 7. Замкнутые подмножества аффинной плоскости — это конечные объединения неприводимых кривых и точек. Соответственно, открытые подмножества получаются удалением с плоскости конечного числа кривых и точек. Любая точка в открытом подмножестве имеет в нём окрестность, полученную удалением с плоскости одной неприводимой кривой.

Теперь определим регулярные функции и отображения. Начнём с аффинных подмножеств.

Определение 8. Функция $F \colon X \to \mathsf{k}$ на алгебраическом подмножестве $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется *регулярной*, если найдётся многочлен $f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ такой, что $F = f|_X$.

Определение 9. Отображение алгебраических подмножеств $X \to Y$, где $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ называется *регулярным*, если имеет вид $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))$, где ϕ_i – регулярные функции на X.

Хорошие функции, как и в случае функций действительного переменного, не всегда определены всюду.

Определение 10. Функция $F \colon U \to \mathsf{k}$ на открытом подмножестве алгебраического подмножества $U \subset X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется *регулярной*, если для любой точки $x \in U$ найдётся такая окрестность $x \in V \subset U$ и найдутся такие многочлены $f, g \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, что g не обращается в ноль на V и $F|_V = \frac{f}{g}|_V$.

Определение 11. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ — алгебраические подмножества, а $U \subset X$ и $V \subset Y$ — открытые по Зарисскому подмножества. Отображение $U \to V$ называется *регулярным*, если имеет вид $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))$, где ϕ_i – регулярные функции на U.

Определение 12. Алгебраические подмножества (или их открытые подмножества) называются *изоморфными*, если между ними существуют взаимно обратные регулярные отображения.

Пример 13. Регулярные функции на $\mathbb{A}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ — это функции вида $f(x)/g(x)$, где $f, g \in \mathsf{k}[x]$ и все корни g лежат в множестве $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Замечание 14. Для алгебраического подмножества в $\mathbb{A}^n$ у нас есть два определения регулярной функции, так как подножество открыто в себе самом. Вообще говоря, они не равносильны: рассмотрите функцию $\frac{1}{x^2+1}$ на $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. Однако, как мы позже увидим, для алгебраически замкнутого поля эти определения равносильны: функция, локально представимая как отношение многочленов, задаётся глобально как многочлен.

Пример 15. Функции перехода между разными координатами на картах проективного пространства

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} \colon \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

– регулярные изоморфизмы между открытыми подмножествами в $\mathbb{A}^n$. Т.е., можно считать, что проективное пространство склеено из аффинных многообразий.

Пример 16. Пусть X — плоская кривая $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Любое регулярное отображение $X \to \mathbb{A}^2$ задаётся парой многочленов: $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$. При этом разные пары многочленов могут задавать одно и то же отображение: так, отображения $(x^3, (x + y)^2)$, $(x - xy^2, 2xy + 1)$ и $(x^5 + x^3y^2, 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2)$ совпадают на X.

Пример 17. Проколотая прямая $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ и кривая $C = \{xy - 1 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$ изоморфны. Взаимно обратные регулярные отображения задаются формулами $\phi(x) = (x, 1/x)$ и $\psi(x, y) = x$.

Пример 18. Прямая $\mathbb{A}^1$ и парабола $C = \{y - x^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$ изоморфны. Взаимно обратные регулярные отображения задаются формулами $\phi(x) = (x, x^2)$ и $\psi(x, y) = x$.

Пример 19. Аналогично, график любого многочлена $f(x)$ — это плоская кривая, изоморфная аффинной прямой.

Заметим, что регулярные функции и отображения непрерывны в топологии Зарисского, т.е. прообраз любого открытого множества открыт. Определение топологии Зарисского естественно, хотя открытых и замкнутых множеств получается очень мало. Сравните два утверждения:

1. Любое замкнутое множество в $\mathbb{A}^n$ в топологии Зарисского — это прообраз точки при некотором регулярном отображении $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$.

2. Любое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ в метрической топологии — это прообраз точки при некотором непрерывном отображении $\mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$.

Теперь определим регулярные функции и отображения для проективных подмножеств. Поскольку они покрываются аффинными, это сделать несложно.

Определение 20. Функция $f\colon U \to \mathsf{k}$ на открытом подмножестве $U \subset X$ алгебраического подмножества проективного пространства называется *регулярной*, если при всех i ограничение $f|_{U \cap U_i}$ – регулярная функция на открытом подмножестве алгебраического подмножества $U \cap U_i \subset X \cap U_i$.

Как можно задавать регулярные функции?

Лемма 21. *Пусть $F, G \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ – однородные многочлены одинаковой степени, причём G не обращается в ноль на открытом подмножестве алгебраического подмножества $U \subset X \subset \mathbb{P}^n$. Тогда частное F/G определяет регулярную функцию на U.*

Доказательство. Хотя значения $F(x)$ и $G(x)$ не определены для точки x проективного пространства, их частное корректно определено, оно не зависит от выбора однородных координат для точки. Для любой точки $x \in U$ рассмотрим карту $U_i \ni x$. Тогда F/G примет вид f/g, где $f = F(y_0, \ldots, 1, \ldots, y_n)$ и $g = G(y_0, \ldots, 1, \ldots, y_n)$ – многочлены от аффинных координат y_j на U_i и g не обращается в 0 на $U \cap U_i$. Значит, F/G регулярна на $U \cap U_i$ по определению. □

Определение 22. Отображение $\phi\colon U \to V$ из открытого подмножества $U \subset X \subset \mathbb{P}^n$ алгебраического подмножества проективного пространства в открытое подмножество $V \subset Y \subset \mathbb{A}^m$ в алгебраическом подмножестве аффинного пространства *регулярно*, если задаётся набором регулярных на U функций: $\phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$.

Отображение $\phi\colon U \to V$ между открытыми подмножествами $U \subset X \subset \mathbb{P}^n$ и $V \subset Y \subset \mathbb{P}^m$ в алгебраических подмножествах проективных пространств *регулярно*, если для любого $j = 0 \ldots m$ и любой такой точки $x \in U$, что $\phi(x) \in U_j$, найдётся окрестность $U \supset U' \ni x$, для которой $\phi(U') \subset U_j$ и отображение $\phi|_{U'}\colon U' \to V \cap U_j$ регулярно (по первой части определения уже известно, что значит).

Как же на практике можно задавать регулярные отображения в координатах, мы обсудим в следующий раз.