

## Листок 1

Пусть задано отображение  $T : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , и пусть  $T^n(x) := T(T(\dots T(x)) \dots)$  —  $n$ -кратное применение отображения  $T$ . *Траекторией* точки  $x$  называется последовательность  $\{x, T(x), T^2(x), \dots, T^n(x), \dots\}$ . Траектория точки  $x$  называется *периодической*, если существует  $n$  такое, что  $T^n(x) = x$ ; траектория называется *пре-периодической*, если существуют  $n$  и  $k$  такие, что  $T^{k+n}(x) = T^k(x)$ .

Подмножество  $A \subset [0; 1]$  называется *всюду плотным*, если для любого интервала  $I \subset [0; 1]$  существует точка из  $A$ , лежащая в этом интервале.

Будем обозначать символом  $\{x\}$  дробную часть числа  $x$ .

**Задача 1.1.** Пусть  $T : x \rightarrow \{x + \alpha\}$ ,  $\alpha$  — фиксированное вещественное число. Для всех  $\alpha$  опишите множества точек с периодическими траекториями и множества точек с всюду плотными траекториями.

**Задача 1.2.** Какие числа из отрезка  $[0; 1]$  обладают более, чем одной записью вида  $0.w_1w_2w_3\dots$  в двоичной системе счисления ?

**Задача 1.3.** Пусть  $T : x \rightarrow \{2x\}$ . Существует ли точка с всюду плотной траекторией при этом отображении ?

**Задача 1.4.** Опишите для отображения  $T : x \rightarrow \{2x\}$  множества периодических и пре-периодических траекторий.

**Задача 1.5.** Пусть

$$T : x \rightarrow \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0; 1/2] \\ 2 - 2x, & \text{при } x \in [1/2; 1]. \end{cases}$$

Существует ли точка с всюду плотной траекторией при этом отображении ?

**Задача 1.6.** Пусть  $T : x \rightarrow 4x(1 - x)$ . Существует ли точка с всюду плотной траекторией при этом отображении ?

**Задача 1.7.** Существуют ли у всех отображений, указанных выше, устойчивые траектории ?

**Задача 1.8.** Существуют ли у всех отображений, указанных выше, периодические точки периода 2014, и если да, то сколько их ?