Листок 8-9. Конформная теория поля

(Сканы решений данных задач принимаются до: **10.01.15**
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

*!Упражнения помеченные * выполнять не обязательно.*

Упражнение 1: Евклидова инвариантность теории (относительно группы $O(2)$), в бутстрапном подходе приводит к требованию существования в пространстве полей $\mathcal{A}$, поля — симметричного тензора напряжений $T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x)$, который удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0$, то есть равенству

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x) X \rangle = 0. \tag{0.1}$$

Напишите как связанны компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ в вещественных координатах, с компонентами T^{zz}, $T^{\bar{z}\bar{z}}$ и $T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z}$. Выделим компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ в координатах ($z = x^1 + ix^2, \bar{z} = x^1 - ix^2$):

$$T = T_{zz}, \quad \bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \Theta = -T_{z\bar{z}}. \tag{0.2}$$

Покажите, что уравнения непрерывности запишутся как

$$\partial_{\bar{z}} T(z, \bar{z}) = \partial_z \Theta(z, \bar{z}), \quad \partial_{\bar{z}} \Theta(z, \bar{z}) = \partial_z \bar{T}(z, \bar{z}) \tag{0.3}$$

(Найдите метрический тензор в координатах $(z, \bar{z})$, учтя, что в координатах (x^1, x^2) это есть дельта-символ Кронекера).

Упражнение 2*: Пусть $z = x^1 + ix^2$ и $\bar{z} = x^1 - ix^2$. Найдите $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ и $\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Учитывая, что $d^2 z = -2i dx^1 dx^2$ ($dz \wedge d\bar{z} = (dx^1 + idx^2) \wedge (dx^1 - idx^2) = -2i dx^1 \wedge dx^2$). Напишите дельта функцию в комплексных координатах $\int d^2 z \delta(z, \bar{z}) = 1$, через дельта функцию от обычных координатах. Выведите формулу Грина в комплексных координатах

$$\int_R d^2 z (\partial_z V + \partial_{\bar{z}} U) = \oint_{\partial R} (V d\bar{z} - U dz), \tag{0.4}$$

где контурный интеграл берется против часовой стрелки. На основании данного соотношения покажите, что контурный интеграл

$$\oint_C \left\langle \left[T(z, \bar{z}) \frac{dz}{2\pi i} + \Theta(z, \bar{z}) \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \right] O_1(z_1, \bar{z}_1) ... O_N(z_N, \bar{z}_N) \right\rangle, \tag{0.5}$$

взятый по произвольному контуру C в $R^2 / \{(z_i, \bar{z}_i)\}$, не меняется при произвольных непрерывных деформациях контура в этой области.

Упражнение 3: Выведите формулу для вариации действия

$$\delta_\varepsilon S = \int d^2 x \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) T^{\mu\nu}(x), \tag{0.6}$$

при бесконечно малых преобразованиях координат в $\mathbb{R}^2$

$$x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x). \tag{0.7}$$

Формулу легко получить, если вспомнить, что $\delta S = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^2 x$, а также, что $\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \varepsilon_\nu + \nabla_\nu \varepsilon_\mu$ (Выведите это тоже).

Упражнение 4: В лагранжевом подходе получите формулу (используя результат предущего Упражнения)

$$\sum_{i=1}^{N}\langle O_1(x_1)...O_{i-1}(x_{i-1})\delta_\varepsilon O_i(x_i)O_{i+1}(x_{i+1})...O_N(x_N)\rangle + \int d^2x\partial_\mu\varepsilon_\nu(x)\langle T^{\mu\nu}(x)O_1(x_1)...O_N(x_N)\rangle = 0, \tag{0.8}$$

где $\langle X\rangle = \int Xe^{-S[\varphi]}D[\varphi]$ и $\delta_\varepsilon O = \tilde{O}(x+\varepsilon) - O(x)$.

Упражнение 5: Почему интеграл в Упражнении 4 не равен нулю, ведь казалось бы $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$? Покажите, что для вариации одного поля можно получить формулу

$$\delta_\varepsilon O(x) = \int_{\partial\Lambda_x} dy^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon_\mu(y)T^{\mu\nu}(y)O(x) + \int_{\Lambda_x} d^2y\partial_\mu\varepsilon_\nu(y)T^{\mu\nu}(y)O(x), \tag{0.9}$$

где Λ_x — произвольная малая область в $\mathbb{R}^2$, содержащая точку x, а $\partial\Lambda_x$ — ее граница и $\varepsilon_{\lambda\mu}$ — символ Леви-Чевита. Область Λ_x может быть сделана сколь угодно малой, откуда следует локальная зависимость $\delta_\varepsilon O(x)$ от $\varepsilon(x)$.

Упражнение 6*: Чему равно соотношение в Упражнении 4, для преобразований-растяжений $\varepsilon^\mu = x^\mu dt$, если вариация поля равна

$$\delta_\varepsilon O(x) = dt(ix^\mu P_\mu + D)O(x), \tag{0.10}$$

где $P_\mu = -i\partial_\mu$, а D — оператор растяжения действующий на пространстве полей $\mathcal{A}$.

Упражнение 7: Конформными называются преобразования координат

$$y^\mu = y^\mu(x), \tag{0.11}$$

при которых метрический тензор инвариантен с точностью до множителя

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu = \rho(x)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{0.12}$$

Покажите, что для бесконечно малых преобразований

$$x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \tag{0.13}$$

это условие записывается в виде

$$\partial_\mu\varepsilon_\mu(x) + \partial_\nu\varepsilon_\mu(x) = g_{\mu\nu}\partial^\lambda\varepsilon_\lambda(x). \tag{0.14}$$

Упражнение 8: Покажите, что при бесконечно малых конформных преобразованиях и условии $\Theta(x) = T^\mu_\mu(x) = 0$, вариация действия равна нулю.

Упражнение 9: Проверьте, что любые подстановки вида

$$z \to \zeta(z), \quad \bar{z} \to \bar{\zeta}(\bar{z}), \tag{0.15}$$

где $\zeta(z)$ и $\bar{\zeta}(\bar{z})$ — произвольные аналитические функции, являются конформными преобразованиями.

Упражнение 10*: Теперь если предположить условие $T_\mu^\mu = 0$, то есть только две компоненты тензора энергии импульса: $T = T(z)$ и $\bar{T} = \bar{T}(\bar{z})$. Покажите, что величина

$$I = \int_C \frac{dz}{2\pi i} \varepsilon(z) \langle T(z) X \rangle, \qquad X = O_1(z_1, \bar{z}_1) ... O_N(z_N, \bar{z}_N) \tag{0.16}$$

является интегралом движения, то есть не меняется при непрерывных деформациях контура C.

Упражнение 11: Итак вариация поля есть

$$\delta_\varepsilon O(z, \bar{z}) = \oint \frac{du}{2\pi i} \varepsilon(u) T(u) O(z, \bar{z}) \tag{0.17}$$

и по определению, операторное разложение

$$T(u) O(z, \bar{z}) = \sum \frac{L_n O(z, \bar{z})}{(u - z)^{n+2}}. \tag{0.18}$$

Покажите, что $L_{-1} = \partial_z$.

Упражнение 12*: Для бесследового тензора энергии импульса оператор спина есть

$$SO(z, \bar{z}) = \oint_C \left[\frac{du}{2\pi i} (u - z) T(u) - \frac{d\bar{u}}{2\pi i} (\bar{u} - \bar{z}) \bar{T}(\bar{u}) \right] O(z, \bar{z}), \tag{0.19}$$

а оператор растяжения D определяется, как

$$\delta_\varepsilon O(0, 0) = DO(0, 0). \tag{0.20}$$

Покажите, что $S = L_0 - \bar{L}_0$, а $D = L_0 + \bar{L}_0$.

Упражнение 13: Выведите соотношение $[L_{-1}, L_n] = -(n+1) L_{n-1}$ рассматривая интеграл

$$\oint_{C_1} \frac{du_1}{2\pi i} T(u_1) \oint_{C_2} \frac{du_2}{2\pi i} T(u_2) (u_2 - z)^{n+1} O(z, \bar{z}), \tag{0.21}$$

где контур C_2 проходит внутри контура C_1.

Упражнение 14*: Полагая, что корреляционная функция $\langle T^{\mu\nu} X \rangle$ достаточно быстро убывает при $x \to \infty$, покажите, что можно получить уравнения

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \partial_{z_i} \langle X \rangle = \sum_{i=1}^N \partial_{\bar{z}_i} \langle X \rangle = 0, \\ &\sum_{i=1}^N \left(z_i \partial_{z_i} - \bar{z}_i \partial_{\bar{z}_i} + L_0 - \bar{L}_0 \right) \langle X \rangle = 0 \end{aligned} \tag{0.22}$$

Какие интегралы для этого нужно рассмотреть? Пусть спин поля O_i равен s_i, то есть $SO_i = (L_0 - \bar{L}_0) O_i = s_i O_i$, покажите, что на основании уравнений выше, можно получить для двухточечной функции в радиальных координатах ($z = re^{i\sigma},\ \bar{z} = re^{-i\sigma}$) выражение

$$\langle O_i(z, \bar{z}) O_j(0, 0) \rangle = e^{-i(s_i + s_j)\sigma} D_{ij}(r), \tag{0.23}$$

где $D_{ij}(r)$ некоторые функции радиального расстояния r. Покажите, что отсюда следует, что спин поля может принимать только целые (для бозе-полей) или полуцелые (для ферми-полей) значения.

Упражнение 15: Выведите соотношения

$$\oint_{z,0} duuT(u)\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(0,0) = (z\partial_z + \Delta_1 + \Delta_2)\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(0,0)$$
$$\oint_{z,0} duu^2T(u)\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(0,0) = (z^2\partial_z + 2z\Delta_1)\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(0,0) \tag{0.24}$$

где φ_1 и φ_2 — конформные поля, то есть поля для которых верно: $L_1\varphi = 0$, $L_0\varphi = \Delta\varphi$ (иногда они также называются квази-примарными полями).

Упражнение 16*: Предполагая, что набор полей $\{\varphi_\alpha, ..., \partial_z^n\partial_{\bar{z}}^m\varphi_\alpha, ...\}$, является базисом, где φ_α — конформные поля, и используя формулы Упражнения 15, получите из операторного разложения

$$\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(0,0) = \sum_\alpha \sum_{n,m}^{\infty} C_{12}^{\alpha(n,m)}(z,\bar{z})\partial_u^n\partial_{\bar{u}}^m\varphi_\alpha(u,\bar{u})|_{u,\bar{u}=0}, \tag{0.25}$$

сначала первую формулу для структурных констант

$$C_{12}^{\alpha(n,m)}(z,\bar{z}) = f_{12}^{\alpha(n,m)} z^{\Delta_\alpha+n-\Delta_1-\Delta_2}\bar{z}^{\bar{\Delta}_\alpha+m-\bar{\Delta}_1-\bar{\Delta}_2}, \tag{0.26}$$

где f — некоторые постоянные. А затем пользуясь второй формулой в Упражнении 9, получите окончательное выражение

$$\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(0,0) =$$
$$= \sum_\alpha f_{12}^\alpha z^{\Delta_\alpha-\Delta_1-\Delta_2}\bar{z}^{\bar{\Delta}_\alpha-\bar{\Delta}_1-\bar{\Delta}_2}F(\Delta_\alpha+\Delta_1-\Delta_2, 2\Delta_\alpha, z\partial_u)F(\bar{\Delta}_\alpha+\bar{\Delta}_1-\bar{\Delta}_2, 2\bar{\Delta}_\alpha, \bar{z}\partial_{\bar{u}})\varphi_\alpha(u,\bar{u})|_{u,\bar{u}=0}, \tag{0.27}$$

где f_{12}^α — числовые постоянные, а F — вырожденная гипергеометрическая функция. На этапе получения этой формулы, придется подсчитать выражение для коммутаторов вида $[L_0, L_{-1}^n]$ и $[L_1, L_{-1}^n]$, где $L_{-1} = \partial_u$.

Упражнение 17: Предполагая, что компоненты T и $\bar{T}$ тензора напряжений удовлетворяют асимптотическому условию $T(z) \sim z^{-4}$ и $\bar{T}(\bar{z}) \sim \bar{z}^{-4}$ при $z, \bar{z} \to \infty$, получите три разных дифференциальных уравнения на N-точечную корреляционную функцию конформных полей

$$\sum_{i=1}^N \hat{\mathcal{L}}_n^{(i)}\langle\varphi_{\alpha_1}(z_1,\bar{z}_1)...\varphi_{\alpha_N}(z_N,\bar{z}_N)\rangle = 0, \qquad n = 0, \pm 1,$$

где

$$\hat{\mathcal{L}}_n^{(i)} = z_i^{n+1}\partial_{z_i} + (n+1)\Delta_i z_i^n, \quad n = 0, \pm 1.$$

С помощью этих уравнений покажите, что для двух- и трехточечных функций немедленно следует

$$\langle\varphi_1(z_1,\bar{z}_1)\varphi_2(z_2,\bar{z}_2)\rangle = D_{12}z_{12}^{-2\Delta_1}\bar{z}_{12}^{-2\bar{\Delta}_1}\delta_{\Delta_1,\bar{\Delta}_2}\delta_{\Delta_2,\bar{\Delta}_2},$$
$$\langle\varphi_1(z_1,\bar{z}_1)\varphi_2(z_2,\bar{z}_2)\varphi_3(z_3,\bar{z}_3)\rangle = C_{123}(z_{12})^{\gamma_3}(z_{13})^{\gamma_2}(z_{23})^{\gamma_1}(\bar{z}_{12})^{\bar{\gamma}_3}(\bar{z}_{13})^{\bar{\gamma}_2}(\bar{z}_{23})^{\bar{\gamma}_1} \tag{0.28}$$

где δ — дельта символ Кронекера, а $z_{ij} = z_i - z_j$ и $\gamma_i = 2\Delta_i - \Delta$ и $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$. (В данных задачах может быть удобным перейти в координаты ξ_{ij} по формулам $z_{ij} = \ln\xi_{ij}$ или $z_{ij} = -\frac{1}{\xi_{ij}}$)

Упражнение 18: Покажите, что четырехточечная функция

$$\langle\varphi_1(z_1,\bar{z}_1)\varphi_2(z_2,\bar{z}_2)\varphi_3(z_3,\bar{z}_3)\varphi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = \prod_{i<j}(z_{ij})^{\gamma_{ij}}(\bar{z}_{ij})^{\bar{\gamma}_{ij}}G_{34}^{12}(x,\bar{x}), \tag{0.29}$$

где $\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0$, $\gamma_{14} = -2\Delta_1$, $\gamma_{24} = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_4$, $\gamma_{34} = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4$, $\gamma_{23} = \Delta_4 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$ и $x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{32}}$ удовлетворяет уравнениям из Упражнения 17, и как вспомогательный прием, покажите, что $\sum_i z_i^n \partial_{z_i} x = 0$ при $n = 0, 1, 2$.

Упражнение 19*: Покажите на двух- и трехточечных корреляционных функциях, что поля должны преобразовываться по закону

$$\varphi(z, \bar{z}) = (cz + d)^{-2\Delta}(c\bar{z} + d)^{-2\bar{\Delta}}\tilde{\varphi}(w, \bar{w}), \tag{0.30}$$

при проективных преобразованиях $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc = 1$, чтобы корреляционные функции оставались инвариантными при таких преобразованиях

$$\langle \varphi_1(z_1, \bar{z}_1)...\varphi_N(z_N, \bar{z}_N)\rangle = \langle \tilde{\varphi}_1(w_1, \bar{w}_1)...\tilde{\varphi}_N(w_N, \bar{w}_N)\rangle. \tag{0.31}$$

Упражнение 20*: Рассмотрим для полей метрику вида

$$(O_i, O_j) = \lim_{z,\bar{z}\to\infty} \langle e^{2zL_0} e^{2\bar{z}\bar{L}_0} O_j^+(z, \bar{z}) O_i(0, 0)\rangle, \tag{0.32}$$

По определению L_n^+ верно $(L_n O_i, O_j) = (O_i, L_n^+ O_j)$. Покажите, что в данной метрике $L_n^+ = L_{-n}$, для этого подействовав L_n на поле O_j, правильно сделайте замену координат, перекинув контур интегрирования на поле $O_i(0, 0)$, и преобразовав тензор напряжений T по формуле из Упражнения 25, учтя что его размерность равна 2. Также учитывайте, что поля с разными размерностями ортогональны в данной метрике. Покажите, что в унитарной теории (т.е. в которой $(O_i, O_j) \geqslant 0$), размерности конформных полей, также не отрицательны, для этого рассмотрите $(L_{-1}O, L_{-1}O)$. Покажите также, что поле с размерностью $(\Delta, \bar{\Delta}) = (0, 0)$ кратно единичному оператору. Далее можно ввести понятие состояния по формуле $\Phi_\Delta(0)|0\rangle = |\Delta\rangle$, где Φ_Δ — примарное поле ($L_0\Phi_\Delta = \Delta\Phi_\Delta$, $L_n\Phi_\Delta = 0$, при $n > 0$). Тогда очевидно, что потомки примарного поля Φ_Δ являются состояниями $\Phi_\Delta^{(k)}(0)|0\rangle = L_{-\vec{k}}|m\rangle$, где $L_{-\vec{k}} = L_{-k_1}...L_{-k_N}$. Причем очевидно, что $L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle$, а $L_n|\Delta\rangle = 0$, если $n > 0$. Сопряженное состояние вводится, немного хитрее, а именно определим $\langle\Delta| = \lim_{z,\bar{z}\to\infty} \langle 0|\Phi_\Delta(z, \bar{z}) z^{2L_0} \bar{z}^{2\bar{L}_0}$. Покажите, что так определенные состояния обладают свойством

$$\langle\Delta_1|\Delta_2\rangle = \delta_{\Delta_1,\Delta_2}, \quad \langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}(1, \bar{1})|\Delta_3\rangle = C^{\Delta_3}_{\Delta_1,\Delta_2}, \tag{0.33}$$

где $C^{\Delta_3}_{\Delta_1,\Delta_2}$ —структурная константа, и она же константа в для трехточечной корреляционной функции. Также покажите, что $\lim_{z,\bar{z}\to\infty} \langle 0|\Phi_\Delta^{(k)}(z, \bar{z}) z^{2L_0} \bar{z}^{2\bar{L}_0} = \langle\Delta|L_{\vec{k}}$.

Упражнение 21: Мы предполагаем, что тензор напряжений T имеет размерность $(2, 0)$, т.е. $L_0 T = 2T$. Далее мы полагаем, что $L_2 T = \frac{c}{2} I$, где c — некая константа (центральный заряд), а I — единичный оператор. Покажите, что из того, что бозонное поле T коммутативно, то есть $T(u)T(z) = T(z)T(u)$ следует, что $L_1 T = 0$, то есть поле T — конформное поле (но не примарное!). Суммируя все знания о действии операторов L_2, L_1, L_0, L_{-1} на поле T, покажите, что верно следующее операторное разложение

$$T(u)T(z) = \frac{c}{2(u - z)^4} + \frac{2}{(u - z)^2}T(z) + \frac{1}{u - z}\partial_z T(z) + \text{reg}. \tag{0.34}$$

Упражнение 22: Покажите, что из операторного разложения тензора T с T, следует его вариация при перобразовании $z \to z + \varepsilon(z)$ вида

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z)\partial_z T(z) + 2\varepsilon'(z)T(z) + \frac{c}{12}\varepsilon'''(z). \tag{0.35}$$

(Фактически это упражнение на взятие вычетов).

Упражнение 23: Рассматривая контурный интеграл

$$\oint_{C_1} du_1 (u_1 - z)^{n+1} T(u_1) \oint_{C_2} du_2 (u_2 - z)^{m+1} T(u_2) O(z, \bar{z}), \tag{0.36}$$

получите выражение для коммутатора в алгебре Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \tag{0.37}$$

покажите, что этот коммутатор является центральным расширением более простой алгебры векторных полей, где $l_n = -z^{n+1}\partial_z$, для этого вычислите $[l_n, l_m]$.

Упражнение 24: Напишите операторное разложение тензора T, с примарным полем Φ, то есть полем для которого верны равенства

$$\begin{aligned} &L_n \Phi = \bar{L}_n \Phi = 0, \quad n > 0, \\ &L_0 \Phi = \Delta \Phi, \quad \bar{L}_0 \Phi = \bar{\Delta} \Phi. \end{aligned} \tag{0.38}$$

Напишите как преобразуется примарное поле при малых вариациях $z \to z + \varepsilon(z)$. В итоге получите закон преобразования поля Φ

$$\Phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}} \tilde{\Phi}(w, \bar{w}) \tag{0.39}$$

при любых конформных подстановках $z \to w(z)$.

Упражнение 25*: Проверьте, что общий закон преобразования тензора напряжений

$$T(z) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T(w) + \frac{c}{12}\{w, z\}, \tag{0.40}$$

удовлетворяет инфинитезимальному (Упражнение 22), где производная Шварца (Шварциан) есть

$$\{w, z\} = \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2. \tag{0.41}$$

Упражнение 26*: Докажите тождество для Шварциана

$$\{w, z\} = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 \{w, \zeta\} + \{\zeta, z\}, \tag{0.42}$$

где $w(z) = w(\zeta(z))$. Решите уравнение $\{w(z), z\} = 0$.

Упражнение 27: Выведите соотношения

$$\langle T(u)\Phi_1(z_1, \bar{z}_1)...\Phi_N(z_N, \bar{z}_N)\rangle = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\Delta_i}{(u - z_i)^2} + \frac{\partial_{z_i}}{u - z}\right]\langle\Phi_1(z_1, \bar{z}_1)...\Phi_N(z_N, \bar{z}_N)\rangle \tag{0.43}$$

и

$$\langle T(u)T(u_1)...T(u_M)\Phi_1(z_1,\bar z_1)...\Phi_N(z_N,\bar z_N)\rangle =$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\Delta_i}{(u-z_i)^2}+\frac{\partial_{z_i}}{u-z_i}\right]+\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{2}{(u-u_j)^2}+\frac{\partial_{u_j}}{u-u_j}\right]\right\}\langle T(u_1)...T(u_M)\Phi_1(z_1,\bar z_1)...\Phi_N(z_N,\bar z_N)\rangle +$$
$$+\frac{c}{2}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{(u-u_j)^4}\langle T(u_1)...T(u_{j-1})T(u_{j+1})...T(u_M)\Phi_1(z_1,\bar z_1)...\Phi_N(z_N,\bar z_N)\rangle. \tag{0.44}$$

для примарных полей $\Phi_i(z_i,\bar z_i)$.

Упражнение 28*: Итак конформный класс $[\Phi_l]$ есть примарное поле Φ_l и его потомки $L_{-n_1}...L_{-n_N}\bar L_{-m_1}...\bar L_{-m_M}\Phi_l$. Очевидно, что $[\Phi_l]=[\Delta_l]\otimes[\bar\Delta_l]$. Далее $[\Delta_l]=\bigoplus_{L=0}^{\infty}[\Delta_l,L]$, где $L_0[\Delta_l,L]=(\Delta_l+L)[\Delta_l,L]$. Пусть поле $O_l\in[\Delta_l,L]$, покажите, что $\delta_\varepsilon O_l\in\bigoplus_{M=0}^{L+1}[\Delta_l,M]$.

Упражнение 29:Выведите формулу

$$\langle L_{-n}O(z,\bar z)O_1(z_1,\bar z_1)...O_N(z_N,\bar z_N)\rangle =$$
$$= -\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}C^k_{(1-n)}(z_i-z)^{1-n-k}\langle O(z,\bar z)O_1(z_1,\bar z_1)...L_{k-1}O_i(z_i,\bar z_i)...O_N(z_N,\bar z_N)\rangle, \tag{0.45}$$

перекинув контур интегрирования с точки z, на точки z_i, где $C^k_{(\alpha)}$ —биномиальные коэффициенты

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}C^k_{(\alpha)}x^k. \tag{0.46}$$

Как преобразуется данная формула, если поля $O_1,...,O_N$ являются примарными? Получите это выражение.

Упражнение 30*: Найдите выражение для конформных полей ($L_0\Psi=\Delta\Psi,\ L_1\Psi=0$) на втором и третьем уровнях. (Это есть линейные комбинации потомков примарного поля Φ на этих уровнях)

Упражнение 31: Покажите, что из того что, $L_2T=\frac{c}{2}I$, следует, что T является потомком единичного оператора I на втором уровне $T=L_{-2}I$.

Упражнение 32*: Покажите, что следующие члены в операторным разложении тензора напряжений с самим собой равны

$$T(u)T(z)=...+\frac{3}{10}\partial_z^2T(z)+T_4(z)+O(u-z), \tag{0.47}$$

где $T_4=\left(L_{-2}^2-\frac{3}{5}L_{-4}\right)I$. Воспользуйтесь тем, что $T=L_{-2}I$, а также тем, что $L_{-1}I=0$. Покажите, что поле T_4 является конформным. Покажите, что $T_4=:T^2:-\frac{3}{10}\partial_z^2T$, где $:AB:=\oint_{C_z}\frac{du}{2\pi i}\frac{A(u)B(z)}{u-z}$.

Упражнение 33*: Определим операторы Λ_n как

$$T_4(u)O(z,\bar z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Lambda_nO(z,\bar z)}{(u-z)^{n+4}}. \tag{0.48}$$

Покажите, что для Λ_n верно

$$\Lambda_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : L_k L_{n-k} : + \frac{1}{5}\kappa_n L_n, \tag{0.49}$$

где :: обозначает обычное нормальное упорядочение (операторы L_m с большим m ставятся справа), а

$$\kappa_{2k} = (1-k^2), \quad \kappa_{2k-1} = (1+k)(2-k). \tag{0.50}$$

При выводе этого равенства, можно наивно пытаться сделать два интегрирования последовательно, а именно сначала проинтегрировать по координате u первого тензора напряжений входящего в T_4, а затем по координате w "нормального упорядочения". Такой способ приведет к неверному ответу, так как по очевидным причинам такое последовательное интегрирование делать нельзя (Объясните почему). Правильным способом будет представить такое интегрирование как разность двух (сначала по u затем по w минус сначала по w затем по u), по аналогии с выводом коммутационных соотношений для L_n.

Упражнение 34*: Покажите, что

$$\begin{aligned} L_{-3}T(z) &= \frac{1}{15}\partial_z^3 T(z) + \frac{1}{2}\partial_z T_4(z), \\ L_{-4}T(z) &= \frac{1}{84}\partial_z^4 T(z) + \frac{5}{36}\partial_z^2 T_4(z) + T_6^{(2)}(z), \end{aligned} \tag{0.51}$$

где

$$\begin{aligned} T_6^{(1)} &= (L_{-2}^3 - \frac{1}{3}L_{-3}^2 - \frac{19}{15}L_{-4}L_{-2} - \frac{2}{3}L_{-6})I, \\ T_6^{(2)} &= \frac{1}{9}(-\frac{5}{2}L_{-3}^2 + 4L_{-4}L_{-2} + \frac{10}{7}L_{-6})I, \end{aligned} \tag{0.52}$$

базис в пространстве конформных векторов на 6 уровне. Покажите, что $T_6^{(2)} \sim: (\partial_z T)^2 :$ с точностью до полных производных.

Упражнение 35*: Покажите, что операторное разложение $T(u)$ с $T_4(z)$ есть

$$T(u)T_4(z) = \frac{b}{(u-z)^4}T(z) + \frac{4}{(u-z)^2}T_4(z) + \frac{1}{u-z}\partial_z T_4(z) + \frac{1}{6}\partial_z^2 T_4(z) + T_6^{(1)}(z) + O(u-z), \tag{0.53}$$

где $b = \frac{22}{5} + c$.

Упражнение 36: Покажите, что операторное разложение двух примарных полей, можно представить в виде

$$\Phi_1(z,\bar z)\Phi_2(0,0) = \sum_l \mathbb{C}_{12}^l z^{\Delta_l - \Delta_1 - \Delta_2} \bar z^{\bar\Delta_l - \bar\Delta_1 - \bar\Delta_2} \Psi_l(0,0), \tag{0.54}$$

где поле Ψ_l принадлежит $[\Phi_l]$ и содержит вклады примарного поля $\Phi_l(0,0)$ и всех его конформных потомков:

$$\Psi_l(0,0) = \Phi_l(0,0) + \beta_1 z L_{-1}\Phi_l(0,0) + \bar\beta_1 \bar z \bar L_{-1}\Phi_l(0,0) + ... \tag{0.55}$$

Фактически требуется показать, что зависимость от z и $\bar{z}$ будет именно такая, для этого рассмотрите $\oint_{z,0} \frac{du}{2\pi i} uT(u)\Phi_1(z)\Phi_2(0)$.

Упражнение 37: Рассмотрите действие L_k на произведение

$$L_k(\Phi_1(z,\bar{z})\Phi_2(0,0)) = \oint_C \frac{du}{2\pi i} u^{k+1} T(u)(\Phi_1(z,\bar{z})\Phi_2(0,0)) \tag{0.56}$$

где контур C охватывает против часовой стрелки точки 0 и z. Покажите, что верно равенство

$$L_k(\Phi_1(z,\bar{z})\Phi_2(0,0)) = \left(z^{k+1}\partial_z + (k+1)z^k\Delta_1\right)\Phi_1(z,\bar{z})\Phi_2(0,0) + \Phi_1(z,\bar{z})L_k\Phi_2(0,0). \tag{0.57}$$

Откуда получите коммутационное соотношение между L_k и $\Phi_1(z,\bar{z})$.

Упражнение 38: Пусть конформный класс записывается как $|\Psi_\Delta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^n|\Delta, n\rangle$, покажите, что верно соотношение для $k > 0$

$$L_k|\Delta, n+k\rangle = (\Delta + k\Delta_1 - \Delta_2 + n)|\Delta, n\rangle \tag{0.58}$$

Не забудьте вспомнить про фактор $z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}$, который стоит перед конформным классом.

Упражнение 39: Итак общий вид голоморфной части конформного класса записывается как

$$|\Psi_\Delta\rangle = \sum_{(k)} \beta^{(k)} z^{\sum k_i} L_{-k_1}...L_{-k_n}|\Delta\rangle, \tag{0.59}$$

где $(k) = (k_1 \leqslant k_2 \leqslant ... \leqslant k_N)$. Итак пусть теперь на первых трех уровнях мы имеем

$$\begin{aligned}
|\Delta, 0\rangle &= |\Delta\rangle, \\
|\Delta, 1\rangle &= \beta^{(1)} L_{-1}|\Delta\rangle, \\
|\Delta, 2\rangle &= (\beta^{(1,1)} L_{-1}^2 + \beta^{(2)} L_{-2})|\Delta\rangle.
\end{aligned}$$

С помощью соотношения в Упражнении 38, найдите $\beta^{(1)}, \beta^{(1,1)}, \beta^{(2)}$.

Упражнение 40: По определению

$$z^{\Delta_l-\Delta_1-\Delta_2}\bar{z}^{\bar{\Delta}_l-\bar{\Delta}_1-\bar{\Delta}_2}\langle\Psi_l^{34}|\Psi_l^{12}\rangle = \mathcal{F}(c, \Delta_l, \Delta_i|z)\mathcal{F}(\bar{c}, \bar{\Delta}_l, \bar{\Delta}_i|\bar{z}), \tag{0.60}$$

где $\mathcal{F}(c, \Delta_l, \Delta_i|z)$ называется конформным блоком. Покажите, что

$$\mathcal{F}(c, \Delta_l, \Delta_i|z) = z^{\Delta_l-\Delta_1-\Delta_2} \sum_{(k),(k')} z^{\sum k_i} \beta_{12}^{l,(k)} \beta_{34}^{l,(k')} \langle\Delta_l|L_{k'_{N'}}...L_{k'_1} L_{-k_1}...L_{-k_N}|\Delta_l\rangle \tag{0.61}$$

Пусть $\mathcal{F}(c, \Delta_l, \Delta_i|z) = z^{\Delta_l-\Delta_1-\Delta_2} \sum_{N=0}^{\infty} F_N(c, \Delta_l, \Delta_i)z^N$. Найдите F_1 и F_2.

Упражнение 41: Покажите, что общий член в разложении конформного блока $F_N(c, \Delta, \Delta_i)$, можно представить как

$$F_N(c, \Delta, \Delta_i) = \frac{P_N(c, \Delta, \Delta_i)}{Q_N(c, \Delta)}, \tag{0.62}$$

где P_N и Q_N некоторые полиномы, причем Q_N не зависит от Δ_i, а только от Δ.

Упражнение 42*: Покажите, что при $c \to \infty$ в конформный блок вклад дают только поля вида $L_{-1}^k \Phi_l$, а вклады других полей пропорциональны отрицательным степеням c. Для этого рассмотрите процедуру нахождения констант $\beta^{(k)}$. Далее покажите, что конформный блок равен гипергеометрической функции в этом пределе

$$\mathcal{F}(c, \Delta_l, \Delta_i|z) = x^{\Delta_l - \Delta_1 - \Delta_2} \, {}_2F_1(\Delta_l + \Delta_2 - \Delta_1, \Delta_l + \Delta_3 - \Delta_4, 2\Delta_l, z). \tag{0.63}$$

Для этого покажите, что $\beta_{ij}^{l,n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(\Delta_l + \Delta_i - \Delta_j)}{(2\Delta_l + k)}$ и $\langle \Delta_l | L_1^n L_{-1}^n | \Delta_l \rangle = n! \prod_{k=0}^{n-1} (2\Delta_l + k)$.

Упражнение 43 : В данном упражнении мы будем проводить вычисление конформного блока с помощью вставки полного набора состояний (Упражнение 20 может быть необходимо для лучшего понимания данного материала). Рассмотрим матричный элемент

$$\langle \Delta_1 | \Phi_{\Delta_2}(1) \Phi_{\Delta_3}(z) | \Delta_4 \rangle. \tag{0.64}$$

Вставим в середину такого матричного элемента полный набор состояний с вакуумом Δ:

$$\mathbb{1}_\Delta = \sum_{Y_1, Y_2} L_{-Y_1} | \Delta \rangle \frac{1}{\langle \Delta | L_{Y_1} L_{-Y_2} | \Delta \rangle} \langle \Delta | L_{Y_2}, \tag{0.65}$$

где сумма идет по всем диаграммам Юнга Y_1, Y_2, то есть по всем разбиениям, и если например $Y = \{k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3 \geqslant ...\}$, то $L_{-Y}|\Delta\rangle \overset{\text{def}}{=} L_{-k_1} L_{-k_2} L_{-k_3} .... |\Delta\rangle$. Далее очевидно, что величина

$$\Gamma_{Y_1, Y_2} = \frac{1}{\langle \Delta | L_{Y_1} L_{-Y_2} | \Delta \rangle}, \tag{0.66}$$

есть матрица Грама, и она не является диагональной, так как наш базис состояний $\{L_{-Y}|\Delta\rangle\}$ не является ортогональным.
Далее заметим, что

$$\langle \Delta_1 | \Phi_{\Delta_2}(1) | \Delta \rangle = C_{\Delta_1, \Delta_2}^{\Delta}, \quad \langle \Delta | \Phi_{\Delta_3}(z) | \Delta_4 \rangle = C_{\Delta, \Delta_3}^{\Delta_4} z^{\Delta_3 - \Delta - \Delta_4}. \tag{0.67}$$

Таким образом мы видим, что конформный блок у которого в промежуточном канале бежит конформный класс полей с вакуумом Δ, дается формулой

$$\mathcal{F}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 | \Delta | z) = \sum_{Y_1, Y_2} \frac{\langle \Delta_1 | \Phi_{\Delta_2}(1) L_{-Y_1} | \Delta \rangle}{\langle \Delta_1 | \Phi_{\Delta_2}(1) | \Delta \rangle} \Gamma_{Y_1 Y_2} \frac{\langle \Delta | L_{Y_2} \Phi_{\Delta_3}(z) | \Delta_4 \rangle}{\langle \Delta | \Phi_{\Delta_3}(z) | \Delta_4 \rangle}. \tag{0.68}$$

Проверьте эту формулу до первого уровня, сравнивая результат с ответом получившимя с использованием уравнений цепочки (Упражнение 40). (При вычислении используйте результат Упражнения 37, то есть выражение для коммутатора $[L_n, \Phi_\Delta(z, \bar{z})]$).

Список литературы

[1] Для связи абстрактного формализма конформной теории поля с обычным лагранжевым теорполевым подходом, смотрите Листки 1-8 из курса Введение в квантовую теорию поля II (http://ium.mccme.ru/s14/s14-belavin.html)

[2] А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, МЦНМО, Москва, 2009.

[3] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1999.