Листок 8.

Функциональные последовательности и ряды.

Определения.

Последовательность функций $f_n\colon A \mapsto \mathbb{R}$ сходится к функции f поточечно на A, если для всякого $x \in A$ верно $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Последовательность функций $f_n\colon A \mapsto \mathbb{R}$ равномерно ограничена на A, если существует число $M > 0$ такое, что $|f_n(x)| \le M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in A$.

Последовательность функций $f_n\colon A \mapsto \mathbb{R}$ сходится к функции f равномерно на A, если $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Задача 1. (Критерий Коши) Докажите, что последовательность функций f_n сходится на A равномерно тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ такое, что $\forall n, m > N$ выполняется неравенство $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Задача 2. (Признак Вейерштрасса) Пусть $\sup_{x\in A} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le a_n$ и ряд $\sum_n a_n$ сходится. Покажите, что последовательность функций f_n сходится равномерно к некоторой функции f на множестве A. Переформулируйте этот признак для рядов (ряд сходится равномерно, если равномерно сходится последовательность его частичных сумм). Приведите пример, показывающий, что признак Вейерштрасса не является необходимым условием равномерной сходимости.

Задача 3. Исследовать поточечную и равномерную сходимость:

(a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ при $0 < x < 1$, (b) $f_n(x) = \mathrm{arctg} nx$ при $0 < x < +\infty$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ при $0 < x < +\infty$

Задача 4. Пусть функции f_n непрерывны по A в точке $a \in A$ и сходятся равномерно к функции f на A. Тогда функция f непрерывна по A в точке a. Покажите на примере, что для поточечной сходимости это утверждение не выполняется.

Верна ли теорема Больцано для последовательности функций?

Задача 5*. Докажите, что из последовательности функций $f_n(x) = \sin nx$ на отрезке $[0, 1]$ нельзя выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Задача 6. (Теорема Хелли) Докажите, что из равномерно ограниченной на отрезке последовательности монотонных функций можно выбрать подпоследовательность, которая поточечно сходится.

Задача 7. Из всякой ли поточечно сходящейся последовательности функций на отрезке можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность?

Задача 8. Пусть последовательность непрерывных монотонных на отрезке функций поточечно сходится к непрерывной функции. Докажите, что тогда эта последовательность сходится равномерно.

Задача 9. (признак Дини) Пусть последовательность непрерывных на отрезке функций в каждой точке является монотонной числовой последовательностью и поточечно сходится к непрерывной функции. Докажите, что тогда эта последовательность сходится равномерно.

Задача 10. Пусть f – непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция. Рассмотрим ломанные с вершинами в точках $(r_i, f(r_i))$, где $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_N = 1$ – рациональные числа из отрезка $[0, 1]$. Докажите, что функцию f можно равномерно приблизить последовательностью ломанных такого вида.

Задача 11. (Теорема Арцела-Асколи) Предположим, что последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ такова, что

(i) последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена,

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in [0, 1]$ и всех n верно $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ (функции f_n равностепенно непрерывны).

Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, которая сходится равномерно на $[0, 1]$ к непрерывной функции.

Задача 12*. (Теорема Егорова) Пусть последовательность непрерывных функций сходится поточечно на $[0,1]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset [0,1]$ такой, что сумма длин дополняющих его интервалов или полуинтервалов меньше ε и последовательность сходится на K равномерно.

Теорема Вейерштрасса о приближении многочленами

Задача 13. Докажите следующие равенства: (a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x$, (c) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Задача 14.(Теорема Вейерштрасса) Пусть f – непрерывная функция на $[0,1]$. Докажите, что многочлены Бернштейна $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ равномерно сходятся к f на $[0,1]$ при $n \to \infty$.

Задача 15. Докажите, что всякую непрерывную на компакте функцию можно равномерно на этом компакте приблизить многочленом.

Задача 16. Пусть последовательность многочленов P_n такова, что $\deg P_n \le m$ для всех n и P_n поточечно сходятся к некоторой функции f на отрезке $[0,1]$. Докажите, что f является многочленом степени не выше m и P_n равномерно сходятся к f на $[0,1]$.

Задача 17*. Докажите, что найдется последовательность многочленов $P_n(x)$ такая, что для всякой непрерывной функции f на отрезке $[0,1]$ можно так сгруппировать члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ (не меняя порядка), что новый ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} P_n(x) \right)$ сходится равномерно к функции f.

Степенные ряды

Задача 18. Пусть c_n – последовательность комплексных чисел и $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$. Докажите, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$, причем при $|z| \le r < R$ этот ряд сходится равномерно.

Ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ называют степенными рядами, число R называют радиусом сходимости и круг $B_R = \{z \colon |z| < R\}$ называют кругом сходимости.

Задача 19. Найдите радиус сходимости у следующих рядов:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \big(16^n + (-9)^n\big) z^{2n}$.

Задача 20. Разложите в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ функцию $\frac{1}{1+z+z^2}$.

Задача 21. Пусть $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$. Докажите, что на общем круге сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ верно равенство $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$.

Задача 22. Найдите произведение $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)$. Докажите, что $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. Определением e^z считаем предел $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$.

Производной степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ называется ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Далее пишем $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Задача 23. Докажите, что радиус сходимости продифференцированного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного ряда. Покажите, что производная суммы совпадает с суммой производных и производная произведения вычисляется по правилу Лейбница: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)'$.

Функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ называют производящей функцией для последовательности $\{c_n\}$.

Задача 24. Найдите производящую функцию для последовательности c_n, заданной рекуррентной формулой $c_{n+1} = p c_n + q c_{n-1}$.

Задача 25. Найдите производящую функцию для последовательности c_n, где c_n – число способов представить n в виде суммы целых неотрицательных слагаемых.