Листок 7.
Соображения непрерывности.

Теорема о промежуточном значении.

Задача 1. В ряд стоят 500 сапог: 250 правых и 250 левых, но не обязательно парами. Докажите, что найдутся 250 подряд стоящих сапог, среди которых правых и левых поровну.

Задача 2. На плоскости дано 2000 красных и 2000 синих точек общего положения (т.е., никакие три данные точки не лежат на одной прямой). Докажите, что существует прямая, по каждую сторону от которой находится по 1000 красных и синих точек.

Задача 3. Вчера в полночь было холоднее, чем в полночь позавчера и сегодня. Докажите, что найдется один и тот же момент времени вчера и сегодня, когда температура была одинаковой.

Задача 4. Дана выпуклая фигура и точка вне её. Докажите, что существует прямая, проходящая через эту точку и делящая площадь фигуры пополам. Верно ли, что существует только одна такая прямая? Верно ли это утверждение для точки внутри фигуры?

Задача 5. Дана выпуклая фигура. Докажите, что существует прямая, одновременно делящая пополам её площадь и периметр.

Задача 6. Представьте себе, что пол на кухне у вас не очень ровный (так обычно бывает, особенно если он покрыт линолеумом). Поэтому квадратный табурет стоит на полу только тремя ножками, а четвертая ножка висит в воздухе. Можно ли так передвинуть табурет, чтобы он стоял на полу всеми четырьмя ножками, или может случиться, что, как его ни двигай, табурет все равно будет качаться? Мы, конечно, предполагаем, что, когда табурет твердо стоит на четырех ножках, его поверхность может быть несколько наклонена по отношению к полу.

Следующие две задачи иногда называют «теоремами о блинах».

Задача 7. Даны две выпуклые фигуры (может быть, пересекающиеся). Докажите, что существует прямая, делящая площадь каждой фигуры пополам.

Задача 8. Найдите ошибку в доказательстве утверждения, что любую выпуклую фигуру можно разделить парой взаимно перпендикулярных прямых на четыре равновеликие части. Доказательство: "В любом направлении можно провести единственную прямую l, делящую площадь фигуры пополам. Каждую из получившихся половин фигуры можно разделить на две равновеликие части прямыми, перпендикулярными l. Пусть A и B – точки пересечения этих перпендикулярных прямых с прямой l. Начнем изменять направление прямой l, сохраняя все построения. После изменения направления на 180° точки A и B меняются местами. Значит в некоторый момент они совпадали. В этот момент перпендикулярные прямые совпадали и вместе с прямой l делили фигуру на четыре равновеликие части." Дайте правильное доказательство.

Задача 9. Докажите, что вокруг любой выпуклой фигуры можно описать квадрат.

Непрерывные кривые на окружности.

Пусть $\gamma\colon [0,1] \mapsto S^1$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где x, y – непрерывные функции. Далее всегда предполагаем, что $\gamma(0) = \gamma(1) = (1,0)$. Функция $f\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ называется поднятием кривой γ, если $\gamma(t) = (\cos(2\pi f(t)), \sin(2\pi f(t))$.

Задача 11. Изобразите графики поднятий f (считая, что $f(0) = 0$) для кривых

(a) $\gamma(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$, (b) $\gamma(t) = (\cos(t(1-t)), \sin(t(1-t)))$.

Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N = 1$ на отрезки столь малой длины, что множество $\gamma([a_{k-1}, a_k])$ лежит на дуге, длина которой строго меньше $\pi/2$.

Будем строить поднятие f следующим образом. Положим $f(t) = (2\pi)^{-1}\arcsin(y(t))$ на отрезке $[0, a_1]$. Если уже построили f на $[a_{k-1}, a_k]$, то на следующем отрезке $[a_k, a_{k+1}]$ полагаем $f(t) = f(a_k) + (2\pi)^{-1}\arcsin(\widetilde{y}(t))$, где точка окружности $(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$ получается из точки $(x(t), y(t))$ поворотом на угол $2\pi f(a_k)$ по часовой стрелке.

Задача 12. Докажите, что функция f действительно является поднятием и $f(1) \in \mathbb{Z}$. Каков геометрический смысл $f(1)$? Докажите, что существует только одно поднятие f, для которого $f(0) = 0$.

Величину $f(1)$ называют степенью кривой γ и обозначают через $\deg \gamma$.

Предположим, что для всякого $s \in [0,1]$ задана непрерывная кривая $\gamma_s \colon [0,1] \mapsto S^1$, $\gamma_s(0) = \gamma_s(1) = (1,0)$, и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всяких $s_1, s_2 \in [0,1]$ и всякого $t \in [0,1]$ верно $|s_1 - s_2| < \delta \Longrightarrow |\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < \varepsilon$. Здесь $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Говорят, что задана гомотопия путей γ_0 и γ_1.

Задача 13. Докажите, что тем самым задана гомотопия поднятий f_0 и f_1 и, более того, верно равенство $\deg \gamma_0 = \deg \gamma_1$.

Задача 14. (Основная теорема алгебры) Докажите, что всякий непостоянный многочлен над полем комплексных чисел имеет корень. (Указание: предположим обратное и рассмотрим выражение $\gamma_s(t) = g(se^{it})$, $g(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}$; при каждом s это непрерывная кривая на окружности, причем при больших s степень кривой равна степени многочлена P, а при $s = 0$ эта степень равна нулю; противоречие.)

Задача 15. (Теорема Брауэра о неподвижной точке) Пусть $z = f(w)$ непрерывное отображение (определение непрерывности для комплексных чисел дословно такое же как и для вещественных) $B_1 = \{z : |z| \leq 1\}$ в себя. Докажите, что существует неподвижная точка $z = f(z)$. (Указание: предположим обратное и рассмотрим выражение $\gamma_s(t) = g(se^{it})$, где $g(z)$ – точка пересечения луча, выходящего из $f(z)$ и проходящего через z, с окружностью S^1; заметим, что $g(z) = z$ при $|z| = 1$; тогда степень γ_0 равна нулю, а степень γ_1 равна единице.)

Задача 16. Докажите, что если $f \colon B_1 \mapsto \mathbb{C}$ и $f(z) = -f(-z)$ при $|z| = 1$, то существует точка $z_0 \in B_1$, в которой $f(z_0) = 0$. (Указание: предположим обратное и рассмотрим выражение $\gamma_s(t) = g(se^{it})$, где $g(z) = f(z)/|f(z)|$; степень γ_1 является нечетным числом, а степень γ_0 равна нулю.)

Задача 17. (Теорема Борсука-Улама) Для всякого непрерывного отображения f двумерной сферы S^2 в $\mathbb{R}^2$ существует точка $x \in S^2$, для которой $f(x) = f(-x)$. (Указание: посчитайте разность значений f в диаметрально противоположных точках и спроектируйте полусферу на круг.)

Задача 18. Докажите, что на земле существуют две диаметрально противоположные точки, в которых совпадают давление и температура.

Задача 19*. Докажите, что если сфера представлена как объединение трех замкнутых множеств (не обязательно непересекающихся), то хотя бы одно из них содержит пару диаметрально противоположных точек.

Задача 20**. Докажите, что (трехмерный) бутерброд с маслом и сыром можно разрезать прямолинейным разрезом на две равноценные части (и хлеб, и масло, и сыр должны быть разделены на равные по объему части).