НМУ, I курс, 24.10.2014

Листок 6.

Непрерывность и предел функции.

Определения.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f\colon A \mapsto \mathbb{R}$. Функция f непрерывна в точке $a \in A$ по множеству A, если для всякой последовательности $x_n \in A$ верно $x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Из свойств предела последовательности легко выводится, что сумма, произведение и композиция непрерывных функций являются непрерывными функциями.

Задача 1. Докажите, что f непрерывна в точке a по множеству A тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A$ верно $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f\colon A \mapsto \mathbb{R}$. Пусть a – предельная точка A. Функция f имеет в точке a предел по множеству A равный числу b, если функция $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in A \\ b,\ x = a \end{cases}$ является непрерывной в точке a по множеству $A \cup \{a\}$. Далее пишем $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Ясно, что все свойства непрерывных функций можно переформулировать для предела функции. Однако следует быть аккуратными.

Задача 2. Покажите, что следующее утверждение неверно. Пусть $f\colon A \mapsto B$, $g\colon B \mapsto \mathbb{R}$ и a – предельная точка A и b – предельная точка B. Тогда из существования пределов $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{y\to b} g(y) = c$ следует $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. Как исправить ошибку?

Задача 3. Пусть f – монотонная функция на интервале (a,b). Докажите, что если функция f ограничена сверху, то существует предел в точке b по множеству (a,b) (такой предел называют левым, аналогично предел в точке a по (a,b) называют правым). Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

Задача 4. Докажите, что $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Глобальные свойства непрерывных функций

Функция f непрерывна на множестве A, если она непрерывна в каждой его точке.

Задача 5. Докажите, что множество непрерывных на $\mathbb{R}$ функций континуально.

Задача 6. Докажите, что непрерывную на замкнутом множестве функцию f можно продолжить до функции непрерывной на всей числовой прямой так, что $\sup f$ и $\inf f$ не изменятся.

Задача 7. Докажите, что для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств существует непрерывная функция равная нулю на одном из них и единице на другом.

Задача 8. Докажите, что $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества U прообраз $f^{-1}(U)$ является открытым множеством.

Задача 9. Пусть $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Докажите, что для всякого компакта K образ $f(K)$ является компактом. Выведите из этого утверждения и задачи 6 теорему Вейерштрасса: непрерывная на компакте функция ограничена и принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Функция f является равномерно непрерывной на множестве A, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всяких $x, y \in A$ верно $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 10. Докажите, что непрерывная на компакте функция является равномерно непрерывной. Покажите, что от компактности нельзя отказаться.

Задача 11. Докажите, что если f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то $|f(x)| \le C + C|x|$.

Задача 12. Опишите все непрерывные функции на прямой, удовлетворяющие тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Задача 13*. Существует ли разрывная функция, для которой выполняется тождество из задачи 12?

Задача 14. Существует ли функция на $\mathbb{R}$, непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных ?

Задача 15. Пусть f определена на $\mathbb{R}$. Докажите, что множество точек разрыва является не более чем счетным объединением замкнутых множеств. Всякое ли множество такого вида является множеством точек разрыва некоторой функции?

Задача 16. Существует ли функция на $\mathbb{R}$, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

Задача 17. Пусть f_n – последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций таких, что $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ для всякого x. Докажите, что существуют интервал (a, b) и число C, для которых $|f_n(x)| \le C$ для всякого n и всякого $x \in (a, b)$.

Задача 18. Пусть $f_n(x)$ – последовательность непрерывных функций на $[a, b]$, которая поточечно сходится к функции $f(x)$. Верно ли, что $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке?

Теорема о промежуточном значении

Задача 19. Докажите, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Задача 20. Функция f на отрезке вместе со всякими двумя значениями принимает все промежуточные. Верно ли, что f непрерывна?

Задача 21. Докажите, что непрерывная функция f из $[0, 1]$ в $[0, 1]$ имеет неподвижную точку x: $f(x) = x$.

Задача 22. Пусть f – непрерывная функция из $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$, причем $f(0) = f(1)$. Докажите, что для всякого натурального числа n найдется горизонтальный отрезок с концами на графике этой функции, длина которого равна $1/n$. Докажите, что если число l не имеет вид $1/n$, то найдется функция указанного выше вида, в график которой уже нельзя вписать горизонтальный отрезок длины l.

Задача 23. Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $f(f(x)) = -x$?

Задача 24. (*Канторова лестница*). Постройте монотонную непрерывную функцию $h : [0, 1] \to [0; 1]$, такую что $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, и $h(x)$ постоянна на любом интервале, не содержащем точек из канторова множества.

Отображение $\gamma\colon [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где x, y – непрерывные функции, называется непрерывной кривой в $\mathbb{R}^2$.

Задача 25*. (*Кривая Пеано*) Постройте непрерывную кривую, которая проходит через каждую точку квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.