НМУ, I курс, 26.09.2014

Листок 3.

Предел последовательности.

Только определение.

Задача 1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

(b) во всякой окрестности точки a содержатся все члены последовательности a_n начиная с некоторого номера;

(c) во всякой окрестности точки a содержатся все члены последовательности a_n кроме быть может конечного числа.

Задача 2. Докажите, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится. Верно ли, что если всякая подпоследовательность последовательности a_n сходится, то и сама последовательность a_n тоже сходится?

Задача 3. Докажите, что

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, при $|q| < 1$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Задача 4. Докажите, что у следующих последовательностей нет предела:

a) $a_n = 1 + (-1)^n$; b) $a_n = \sin\frac{\pi n}{3}$; c) $a_n = n^{(-1)^n}$; d) $a_n = \cos n$.

Задача 5. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

Верно ли обратное?

Задача 6. Пусть задана бесконечная треугольная матрица (p_{nk}) с $p_{nk} = 0$ при $k > n$, что $p_{nk} \geq 0$, $p_{n1} + p_{n2} + \ldots + p_{nn} = 1$. Докажите, что для того, чтобы из существования предела $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ вытекало

$$\lim_{n\to\infty} (p_{n1}a_1 + p_{n2}a_2 + \ldots + p_{nn}a_n) = a,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного k

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = 0.$$

Если взять $p_{nk} = 1/n$ при $k \leq n$ и $p_{nk} = 0$ при $k > n$, то получим задачу 5.

Задача 7. Пусть $a_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a.$$

Верно ли обратное?

Задача 8. (Теорема Штольца) Предположим, что a_n возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Докажите, что для всякой последовательности b_n из существование предела $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = A$ следует существование предела $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = A$. (Указание: достаточно доказать при $A = 0$.)

Задача 9. Пусть k – натуральное число. Докажите, что

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} = \frac{1}{2}$.

Монотонность.

Задача 10. Докажите, что ограниченная монотонная последовательность сходится. Можно ли в этом утверждении отказаться от ограниченности или монотонности?

Задача 11. Докажите, что a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$ при $q > 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$;

и выведите из a) и b) равенства: c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\delta} = 0$ при $\delta > 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

Задача 12. Пусть $x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}, x_1 = \sqrt[3]{6}$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Задача 13. Пусть $p > 1$ и $x_{n+1} = \sqrt[p]{1 + x_n}, x_1 = 1$. Докажите, что последовательность x_n сходится к положительному корню уравнения $x^p - x - 1 = 0$.

Задача 14. Пусть $a > 0$. Докажите, что последовательность x_n такая, что

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big),$$

сходится к $\sqrt{a}$. Оцените скорость сходимости.

Задача 15. Что выгоднее (и во сколько раз), когда банк начисляет 100% в конце года или когда банк начисляет 10% десять раз в год? Исследуйте на монотонность последовательности $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ и $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. Этот предел называют числом e.

Задача 16. Докажите, что для всякого n найдется число $\theta_n \in (0, 1)$ такое, что

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}.$$

Выведите из этого, что e иррациональное число.

Задача 17. Докажите (не используя результат задачи 9 (a)), что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

возрастает к $+\infty$. Докажите, что последовательность $b_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ ограничена и, следовательно, сходится.

Положим

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n + 1), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Задача 18. Докажите, что

(a) y_n не убывает, а z_n не возрастает; (b) $z_n - y_n \le 1/n$;

(c) существует число $C > 0$ такое, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

(d) докажите (действуя по аналогии с пунктами (a)–(c)), что найдется число C такое, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n + 1} + C + \varepsilon_n,$$

где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Задача 19. Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины. Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

Задача 20. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то оцените сколько ему потребуется времени?

Критерий Коши.

Задача 21. Докажите, что существует предел у следующих последовательностей:

(a) $x_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 3} + \frac{\cos 2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{\cos n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$;

(b) $x_n = \frac{\cos 1 - \cos 2}{2} + \frac{\cos 2 - \cos 3}{3} + \ldots + \frac{\cos(n-1) - \cos n}{n+1}$.

Задача 22. Выведите из критерия Коши принцип вложенных отрезков.

Задача 23*. Объясните почему критерий Коши не эквивалентен аксиоме полноты. (Указание: проблема с аксиомой Архимеда).