НМУ, I курс, 19.09.2014

Листок 2.

Вещественные числа

Аксиома полноты: любые два непустых множества, одно из которых лежит левее другого на числовой оси, можно разделить точкой.

Задача 1. Докажите, что на множестве бесконечных десятичных дробей аксиома полноты выполняется.

Задача 2. Докажите существование $\sqrt{5}$.

Задача 3. Используя Аксиому Архимеда, докажите, что во всяком непустом интервале существует рациональное число.

Задача 4. Заяц прыгает по окружности против часовой стрелки прыжками одинаковой длины, причем никогда не попадает в свой след. Окружность пересекает узкий ручеек. Докажите, что рано или поздно заяц наступит лапой в ручей.

Задача 5. Точки плоскости с целочисленными координатами окружены кружками радиуса 10^{-2014}. Докажите, что всякая прямая проходящая через начало координат пересекает еще a) хотя бы один кружок, b) бесконечно много кружков.

Задача 6. Может ли периодическая непостоянная функция иметь одновременно период 1 и $\sqrt{2}$? А "хорошая" непостоянная функция? Выясните, при каких значениях λ функция $\sin(\pi x) + \sin(\lambda \pi x)$ является периодической.

Задача 7. (Теорема Лиувилля) Будем говорить, что иррациональное число α хорошо приближается рациональными числами, если для всяких $n, N \in \mathbb{N}$ найдется рациональное число p/q такое, что $|\alpha - p/q| < 1/(Nq^n)$. Приведите пример такого иррационального числа α. Докажите, что хорошо приближаемое иррациональное число не может быть корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, т. е. является трансцендентным числом.

Комплексные числа

Задача 8. Объясните чем плохи «числа» вида $a+be$, сложение и умножение которых определяется также как и в комплексных числах, с единственным отличием $e^2 = 1$?

Задача 9. Докажите, что на $\mathbb{C}$ нельзя определить линейный порядок, согласованный с операциями сложения и умножения.

Задача 10. Вычислите сумму $3\sin x + 3^2 \sin 2x + \dots 3^n \sin nx$.

Задача 11. Найдите функцию $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, которая задает поворот плоскости на угол $\pi/6$ с центром в точке $(1, 1)$.

Задача 12. Изобразите на плоскости множества:

$$a)\, |z-a| \le 1, \quad b)\, |z-a| + |z-b| \ge 1, \quad c)\, \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1.$$

Задача 13. Изобразите на плоскости кривые:

$$a)\, |z| = e^{-\mathrm{Arg} z}, \quad b)\, |z| = \sin(3\mathrm{Arg} z), \quad c)\, \mathrm{Arg} z = e^{1/|z|}.$$

Задача 14. Докажите, что отображение $z \mapsto 1/\overline{z}$ переводит множество всех окружностей и прямых на плоскости в себя.

Задача 15. Изобразите на плоскости множество $\sqrt[n]{1}$. Найдите ошибку в следующем доказательстве

$$1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1.$$

Кватернионы

Рассмотрим множество формальных выражений $q = a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d – вещественные числа. Сложение и умножение определяются также как и для комплексных чисел (т. е. раскрываем скобки как при сложении или умножении обычных «школьных» алгебраических выражений) с учетом следующих равенств

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{и} \quad ijk = -1.$$

Такие формальные выражения q называются кватернионами (от какого слова произошло это название?).

Задача 16. Докажите, что умножение кватернионов ассоциативно, дистрибутивно, но не коммутативно. Объясните, почему с двумя мнимыми единицами i и j ввести ассоциативное и дистрибутивное умножение не получится, т. е. нельзя определить умножение (сложение определяется как и раньше) формальных выражений $a+bi+cj$ с условиями $i^2 = j^2 = -1$.

Пусть $q = a + bi + cj + dk$. Положим $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.

Задача 17. Проверьте, что

(a) $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$,

(b) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ и $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1$,

(c) $|q_1q_2| = |q_1||q_2|$ (если возвести это равенство в квадрат и выразить через a, b, c, d, то получится известное «тождество для четырех квадратов»),

Задача 18. Решите уравнения $xq = 1$ и $qx = 1$, если известно, что $|q| \neq 0$.

Будем представлять себе i, j, k как базисные вектора $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ в $\mathbb{R}^3$ соответственно. Напомним, что для двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^3$ скалярным произведением называется число

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |x||y| \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами, векторным произведением называется вектор $[x, y]$ перпендикулярный векторам x, y, образующий вместе с этими векторами правильную тройку и имеющий длину $|x||y| \sin\varphi$. В координатной записи

$$[x, y] = (x_1y_3 - y_1x_3)i + (y_3x_2 - y_2x_3)j + (y_2x_1 - y_1x_2)k.$$

Задача 19. Пусть $q_1 = x_1i + x_2j + x_3k$ и $q_2 = y_1i + y_2j + y_3k$. Докажите, что

$$q_1q_2 = -\langle q_1, q_2\rangle + [q_1, q_2].$$

Пусть $q = a+q'$, где $q' = x_1i+x_2j+x_3k$. Предположим, что $|q| = 1$. Тогда $a^2+|q'|^2 = 1$ и, следовательно, $a = \cos\varphi$ и $|q'| = \sin\varphi$. Таким образом, $q = \cos\varphi+p\sin\varphi$, где $|p| = 1$.

Задача 20. Пусть вектор $v = v_1i + v_2j + v_3k$ перпендикулярен p. Докажите, что вектор qv получается из v поворотом на угол φ вокруг оси p.

Задача 21. Пусть вектор v пропорционален p. Докажите, что $qv\bar{q} = v$.

Задача 22. Пусть $v = v_1i + v_2j + v_3k$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^3$. Докажите, что вектор $qv\bar{q}$ получается из вектора v поворотом на угол 2φ вокруг оси p. (Сравните это утверждение с геометрической интерпретацией умножения комплексных чисел.)

Задача 23. Докажите, что в $\mathbb{R}^3$ композиция двух поворотов с одним центром является поворотом. Объясните как найти ось и угол этого поворота, если известны оси и углы поворотов, композицией которых он является.