А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ*

АЛГЕБРА

ВТОРОЙ КУРС

Это записки лекций, которые я читаю в НМУ в 2014/15 учебном году. Упражнения, встречающиеся в тексте существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. Некоторые из них снабжены указаниями в конце книги.

Москва, 2014

* ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, e-mail:gorod@itep.ru , http://gorod.bogomolov-lab.ru/

Оглавление

§1. Тензорные произведения

1.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим модули $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W над произвольным коммутативным кольцом K. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным*[1], если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\,\dots\,,\, \lambda v' + \mu v''\,,\,\dots) = \lambda\,\varphi(\,\dots\,,\, v'\,,\,\dots) + \mu\,\varphi(\,\dots\,,\, v''\,,\,\dots)\,.$$

Например, 1-линейные отображения $V \to W$ это линейные операторы, а 2-линейные отображения $V \times V \to K$ это билинейные формы на модуле V.

Полилинейные отображения (1-1) можно обычным образом складывать и умножать на числа из K, так что они тоже образуют K-модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через $\mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ или, когда важно явно указать кольцо, — через $\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$.

Пример 1.1 (полилинейные отображения векторных пространств)
Если $K = \Bbbk$ — поле, а $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W — векторные пространства размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$ и d, то $\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot d$. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в каждом пространстве V_i некоторый базис $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}$, а также базис $e_1, e_2, \dots, e_d$ в W. Отображение (1-1) однозначно определяется своими значениями

$$\varphi\left(\, e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \,\dots\,, e^{(n)}_{\alpha_n} \right) \in W \tag{1-2}$$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов из пространств V_i, т. к. для произвольного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, раскладывающихся по базисам как

$$v_i = \sum_{\alpha_i = 1}^{d_i} x^{(i)}_{\alpha_i}\, e^{(i)}_{\alpha_i}\,, \tag{1-3}$$

из полилинейности отображения φ вытекает равенство

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \,\cdots\, \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \cdot \varphi\left(\, e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \,\dots\,, e^{(n)}_{\alpha_n} \right). \tag{1-4}$$

Раскладывая векторы (1-2) по базису пространства W:

$$\varphi\left(\, e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \,\dots\,, e^{(n)}_{\alpha_n} \right) = \sum_{\nu=1}^{d} a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \cdot e_\nu\,,$$

мы однозначно кодируем отображение φ набором из $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot d$ чисел

$$a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \in \Bbbk\,,$$

[1] или *n-линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов

которые организуются в $(n+1)$-мерную матрицу[1] размера $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n \times d$. Формула (1-4) переписывается через эти матричные элементы как

$$\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\nu, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} a_\nu^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} \cdot x_{\alpha_1}^{(1)} \cdot x_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \cdots \cdot x_{\alpha_n}^{(n)} \cdot e_\nu .$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа соответствующие этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, пространство полилинейных отображений изоморфно пространству многомерных матриц, и базису пространства матриц, состоящему из матриц с единицей в позиции $(i_1, i_2, \ldots, i_n, j)$ и нулями в остальных местах, отвечает базис пространства полилинейных отображений, состоящий из отображений $\delta^j_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)}$, которые действуют на набор векторов (1-3) по правилу

$$\delta^j_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} : (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdot \cdots \cdot x_{i_n}^{(n)} \cdot e_j , \tag{1-5}$$

а на базисные векторы (1-3) — по правилу

$$\delta^j_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} : \left(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots, e_{\alpha_n}^{(n)} \right) \mapsto \begin{cases} e_j , & \text{если } \alpha_k = i_k \ \forall\, k \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1-6}$$

Замечание 1.1. Если всюду в предыдущем примере заменить слова «размерность» и «векторное пространство» словами «ранг» и «свободный модуль», то всё сказанное останется справедливым для любых *свободных* модулей конечного ранга над произвольным коммутативным кольцом K.

1.1.1. Универсальное полилинейное отображение. Рассмотрим произвольное полилинейное отображение модулей над любым коммутативным кольцом K

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U . \tag{1-7}$$

Для всякого K-модуля W взятие композиции полилинейного отображения (1-7) со всевозможными линейными операторами $F : U \to W$ задаёт *линейное* отображение модулей

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F \circ \tau} \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \ldots, V_n; W) . \tag{1-8}$$

Определение 1.1

Полилинейное отображение (1-7) называется *универсальным*, если для каждого модуля W линейный оператор (1-8) является изоморфизмом. Иначе говоря, полилинейное отображение τ универсально, если для любого модуля W и любого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$ существует единственный линейный оператор $F : U \to W$ такой, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в

[1] при $n = 1$ получается обычная 2-мерная матрица (1-) линейного отображения $V \to W$ размера $k \times m$, где $k = \dim V$, $m = \dim W$

диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\
V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & W
\end{tikzcd}
$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Лемма 1.1
Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$\tau_1 : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U_1 \qquad \text{и} \qquad \tau_2 : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U_2$$

существует единственный такой линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. Поскольку и U_1, и U_2 оба универсальны, существуют единственные линейные операторы $F_{21} : U_1 \to U_2$ и $F_{12} : U_2 \to U_1$, которые встраиваются в коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"] & & U_1 \arrow[dd, dashed, "F_{21}"] \\
 & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\tau_1"'] \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dl, "\tau_2"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
U_2 \arrow[uu, dashed, "F_{12}"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"'] & & U_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & & & & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"'] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \\
 & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"] & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & \\
U_1 & & & & U_2
\end{tikzcd}
$$

показывающие, что $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$, т. к. представления самих универсальных полилинейных отображений в виде $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ в силу единственности таковых представлений возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

1.2. Тензорное произведение модулей. Универсальное полилинейное отображение называется *тензорным произведением векторов* и обозначается через

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \,. \tag{1-9}$$

Единственный с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с тензорным произведением векторов, модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* модулей $V_1, V_2, \dots, V_n$, а его элементы — *тензорами*. Тензорные произведения векторов принято записывать как

$$\tau(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n\,. \tag{1-10}$$

Они составляют образ универсального полилинейного отображения (1-9) и называются *разложимыми* тензорами. Поскольку отображение (1-9) не линейно, а полилинейно, его образ, т. е. множество разложимых тензоров, обычно не образует подмодуля[1]. Наугад взятый тензор, являющийся линейной комбинацией мономов (1-10), скорее всего не раскладывается в произведение векторов.

Упражнение 1.1. Выведите из универсального свойства тензорного произведения, что разложимые тензоры линейно порождают модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$.

1.2.1. Существование тензорного произведения. Предыдущее определение гарантирует единственность универсального полилинейного отображения, но не даёт никаких гарантий его существования. Сейчас мы построим модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ при помощи образующих и соотношений. Рассмотрим свободный K-модуль $\mathcal{V}$, базисом в котором по определению являются всевозможные n-буквенные слова

$$[v_1 v_2 \, \dots \, v_n],$$

i-той буквой которых может быть любой вектор $v_i \in V_i$. В этом большом модуле рассмотрим подмодуль $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, порождённый всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\,\cdots\,(\lambda u + \mu w)\,\cdots\,] - \lambda\,[\,\cdots\,u\,\cdots\,] - \mu\,[\,\cdots\,w\,\cdots\,]\,, \tag{1-11}$$

где обозначенные многоточиями буквы не меняются. Положим по определению

$$\begin{gathered} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \mathcal{V}/\mathcal{R} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n = [v_1 v_2 \, \dots \, v_n] \pmod{\mathcal{R}}\,. \end{gathered} \tag{1-12}$$

Иными словами, $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ есть модуль, образованный конечными K-линейными комбинациями формальных тензорных мономов $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$, в которых $v_i \in V_i$ и которые подчиняются соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то полученное произведение можно преобразовать по стандартному правилу для раскрытия скобок:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots = \lambda \cdot (\,\cdots \otimes u \otimes \cdots\,) - \mu \cdot (\,\cdots \otimes w \otimes \cdots\,)\,. \tag{1-13}$$

Лемма 1.2
Отображение $\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto [v_1 v_2 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}} \mathcal{V}/\mathcal{R}$ является универсальным полилинейным отображением.

[1] мы ещё вернёмся к этому в прим. 1.2 и n° 1.2.2

Доказательство. Полилинейность отображения τ тавтологически следует из наложенных нами соотношений и выражается в точности формулой (1-13). Проверим его универсальность. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1 v_2 \dots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (1-11) из полилинейности φ и линейности F получаем

$$
\begin{aligned}
&F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots] - \lambda[\dots u \dots] - \mu[\dots w \dots]\big) = \\
&\qquad = F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots]\big) - \lambda F\big([\dots u \dots]\big) - \mu F\big([\dots w \dots]\big) = \\
&\qquad\qquad = \varphi(\dots, (\lambda u + \mu w), \dots) - \lambda\varphi(\dots, u, \dots) - \mu\varphi(\dots, w, \dots) = 0,
\end{aligned}
$$

что и требовалось. □

Теорема 1.1

Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ также свободно с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i, \tag{1-14}$$

в частности, $\operatorname{rk} V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ свободный модуль с базисом из всех выражений (1-14), которые мы временно будем воспринимать просто как формальные символы. Полилинейное отображение $\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to \mathcal{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $\left(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}\right) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ в соответствующий базисный символ (1-14) модуля $\mathcal{W}$, является универсальным, поскольку для любого полилинейного $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$ и линейного $F : \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ однозначно задаёт действие F на каждый базисный вектор:

$$F(e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}) = \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)})$$

и тем самым однозначно задаёт F. По лем. 1.1 имеется единственный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, переводящий формальные базисные векторы (1-14) пространства $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, лежащие в $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Замечание 1.2. (о бесконечномерных пространствах) Последняя теор. 1.1 остаётся справедливой и для произведений свободных модулей *бесконечного* ранга: дословно то же рассуждение показывает, что свободный модуль, образованный всевозможными конечными линейными комбинациями базисных мономов[1] (1-14), обладает требуемым универсальным свойством. Например, если $V_i = \Bbbk[x_i]$, то

$$\Bbbk[x_1] \otimes \Bbbk[x_2] \otimes \dots \otimes \Bbbk[x_n] \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Изоморфизм сопоставляет каждому базисному произведению $x_1^{m_1} \otimes x_2^{m_2} \otimes \dots \otimes x_n^{m_n}$ обычный моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$.

[1]которых в бесконечномерном случае будет бесконечно много

Пример 1.2 (многообразия Сегре)
Из теор. 1.1 вытекает, что тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ векторных пространств $V_1, V_2, \dots, V_n$ над полем $\Bbbk$ линейно порождается разложимыми тензорами. При этом само множество разложимых тензоров, как уже говорилось, векторным пространством обычно не является и образует внутри $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*.

Говоря точнее, многообразие Сегре определяется как образ *отображения Сегре*

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m ,$$

которое действует из прямого произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\right)$ и переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое разложимым тензором $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$.

Упражнение 1.2. Проверьте, что это отображение корректно определено[1] и является вложением.

По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots, m_n$.

1.2.2. Линейные операторы как тензоры. Для любых векторных пространств U и W имеется каноническое билинейное отображение $U^* \times W \to \mathrm{Hom}(U, V)$, переводящее пару $(\xi, w) \in U^* \times W$ в линейный оператор $U \to W$, действующий по правилу

$$U \ni u \mapsto \xi(u)\, w \in W . \tag{1-15}$$

Это оператор ранга 1, образом которого является 1-мерное подпространство в W, натянутое на вектор w, а ядром — подпространство $\mathrm{Ann}(\xi) \subset U$ коразмерности 1.

Упражнение 1.3. Покажите, что всякий оператор $F : U \to W$ ранга 1 представляется в виде (1-15) с подходящими ненулевыми $\xi \in U^*$ и $w \in W$, которые определяются по F однозначно с точностью до пропорциональности.

В силу универсальности тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{1-16}$$

переводящее каждый разложимый тензор $\xi \otimes w$ в оператор (1-15). Если оба пространства U и V конечномерны, то это отображение является изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в пространствах U и W базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \qquad \text{и} \qquad w_1, w_2, \dots, w_m .$$

По лем. 1.2 в качестве базиса в тензорном произведении $U^* \otimes V$ можно взять mn разложимых тензоров $u_i^* \otimes w_j$, в которых $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in U^*$ составляют двойственный к $u_1, u_2, \dots, u_n$ базис пространства U^*. Соответствующие этим тензорам операторы действуют на базисные векторы пространства U по правилу

$$u_i^* \otimes w_j : u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

[1] т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные

т. е. матрица оператора $u_i^* \otimes w_j$ в выбранных базисах имеет единицу в пересечении j-той строки и i-того столбца и нулями в остальных местах. Тем самым, стандартный базис тензорного произведения $U^* \otimes V$ переводится в стандартный базис пространства операторов.

На геометрическом языке операторы ранга 1, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, составляют многообразие Сегре

$$S \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))\,.$$

Оно линейно порождает всё пространство $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$. Если использовать в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$ матричные элементы (a_{ij}) операторов в каких-нибудь фиксированных базисах, то многообразие Сегре можно задать в этих координатах системой квадратичных уравнений — обращением в нуль всех миноров второго порядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,.$$

Отображение Сегре $\mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$ переводит пару точек (ξ, w) в точку $\xi \otimes w$ и устанавливает биекцию между произведением проективных пространств и многообразием Сегре. На координатном языке пара точек с однородными координатами $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ и $(y_1 : y_2 : \cdots : y_n)$ переводится в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$, т. е. матрица $y^t \cdot x$ ранга 1 (произведение столбца y на строку x). Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре.

Пример 1.3 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)\right)$, состоящей из классов пропорциональных матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; ad - bc = 0\,.$$

Эта биекция переводит пару точек $\xi = (\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}(U^*)$ и $w = (t_0 : t_1) \in W$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix} \tag{1-17}$$

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times v$ и $\xi \times \mathbb{P}_1$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных проективизациями двумерных подпространств из матриц ранга 1, у которых

$$([\text{строка } 1] : [\text{строка } 2]) = (t_0 : t_1)$$
$$([\text{столбец } 1] : [\text{столбец } 2]) = (\xi_0 : \xi_1)\,.$$

В каждом из двух семейств прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка квадрики является точкой пересечения пары прямых из различных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 1.4. Докажите все эти геометрические утверждения.

1.2.3. Тензорные произведения абелевых групп. В общем случае модулей над произвольным коммутативным кольцом из данного нами в n° 1.2 описания тензорного произведения $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ в терминах образующих и соотношений не всегда очевидно его строение и даже отлично ли оно от нуля. Проиллюстрируем это на примере вычисления тензорных произведений конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей.

Покажем, что при взаимно простых m и n произведение $\mathbb{Z}/(m)\otimes\mathbb{Z}/(n) = 0$, т. е. является тривиальным модулем, состоящим лишь из нулевого вектора. При $(m, n) = 1$ класс $[n]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ обратим в кольце $\mathbb{Z}/(m)$, и каждое число $a \in \mathbb{Z}/(m)$ представляется в виде $a = n \cdot a'$, где $a' = [n]^{-1}a$. С другой стороны, для любого $b \in \mathbb{Z}/(n)$ произведение $nb = 0$ в $\mathbb{Z}/(n)$. В силу полилинейности тензорного произведения для любого разложимого тензора $a \otimes b \in \mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$ выполняется равенство

$$a \otimes b = (n \cdot a') \otimes b = n \cdot (a' \otimes b) = a' \otimes (n \cdot b) = \\ = \alpha' \otimes 0 = \alpha' \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (\alpha' \otimes 0) = 0\,,$$

Т. к. разложимые тензоры линейно порождают $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$, этот модуль нулевой.

Вычислим теперь тензорное произведение $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m)$ при $n \leqslant m$. Отображение $\mu : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to \mathbb{Z}/(p^n)$, переводящее пару вычетов $\left([a]_{p^n}, [b]_{p^m}\right)$ в вычет $[ab]_{p^n} = ab \cdot [1]_{p^n}$ билинейно. Покажем, что оно универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to W$ выполняется равенство $\varphi([a]_{p^n}, [b]_{p^m}) = ab \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$, из которого вытекает, что линейное отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$, такое что $\varphi = F \circ \mu$, обязано переводить образующий элемент $[1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$ в $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$. Таким образом, отображение F единственно, если существует. Единственным соотношением на образующую $e = [1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$ является равенство $p^n \cdot e = 0$, и элемент $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$ удовлетворяет этому соотношению, т. к. $p^n \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(p^n \cdot [1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(0, [1]_{p^m}\right) = 0$. Поэтому правило $[1]_{p^n} \mapsto \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$ корректно определяет отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$, что доказывает универсальность. Итак, $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m) \simeq \mathbb{Z}/\left(p^{\min(n,m)}\right)$.

Упражнение 1.5. Покажите, что $\mathbb{Z} \otimes A \simeq A$ для любой абелевой группы A.

Вычисление тензорных произведений произвольных конечно порождённых абелевых групп сводится к рассмотренным случаям при помощи канонических изоморфизмов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, обсуждаемых ниже.

1.3. Канонические изоморфизмы. Всюду далее речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом K. Линейные отображения

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to W \tag{1-18}$$

часто хочется задавать указанием значений f на множестве разложимых векторов

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n), \tag{1-19}$$

а затем по линейности продолжать это правило на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, такое описание однозначно определяет f при условии, что оно корректно: множество разложимых тензоров, как правило, линейно зависимо[1], и все имеющиеся между ними линейные соотношения должны выполняться и между векторами (1-19) в модуле W. Поскольку эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности (1-13), мы приходим к следующему критерию.

Лемма 1.3
Если векторы $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в (1-19) полилинейно зависят от векторов v_i (т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных), то существует единственное линейное отображение (1-18), действующее на разложимые тензоры по правилу

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Предложение 1.1
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, переводящий друг в друга разложимые тензоры $u \otimes w$ и $w \otimes u$.

Доказательство. Правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w и по лем. 1.3 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. По тем же причинам существует линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, переводящее $w \otimes u$ в $u \otimes w$. Эти два отображения обратны друг другу (поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах, линейно порождающих тензорное произведение), и значит, являются изоморфизмами. □

Предложение 1.2
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие друг в друга разложимые тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$.

Доказательство. Тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w). Следовательно, по лем. 1.3 имеется линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, переводящее $v \otimes u \otimes w$ в $v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w, и значит, по лем. 1.3 мы имеем линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \xrightarrow{u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w} V \otimes U \otimes W,$$

которое само по себе линейно зависит от v, т. е. тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$. По лем. 1.3 существует линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W,$$

переводящее $v \otimes (u \otimes w)$ в $v \otimes u \otimes w$, что и требовалось. Изоморфизм между $V \otimes U \otimes W$ и $(V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

[1]например, если K — бесконечное поле, а V_i — конечномерные пространства, пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ тоже конечномерно, а разложимых тензоров в нём бесконечно много

Предложение 1.3
Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V),$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где через $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ обозначено сложение элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в прямой сумме модулей $A \oplus B$.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм — второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \xrightarrow{v \otimes (u \dotplus w) \mapsto (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)} (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала убеждаемся в наличии линейных отображений

$$\varphi_1 : V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W) \quad \text{и} \quad \varphi_2 : V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W),$$

действующих на разложимые тензоры по правилам

$$v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0) \quad \text{и} \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w),$$

затем комбинируем их в отображение

$$\psi : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \xrightarrow{a \dotplus b \mapsto \varphi_1(a) + \varphi_2(b)} V \otimes (U \oplus W),$$

очевидно, линейное и обратное к построенному в начале доказательства. □

1.4. Тензорное произведение линейных отображений. Рассмотрим конечный набор линейных отображений $f_i : U_i \to W_i$ между произвольными модулями над любым коммутативным кольцом. Поскольку тензор

$$f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

полилинеен по $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, правило

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n)$$

корректно задаёт линейное отображение, которое обозначается

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n \to W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

и называется *тензорным произведением* отображений $f_i : U_i \to W_i$.

Пример 1.4 (тензорное произведение вложения с тождественным оператором) Если отображение $f : U \hookrightarrow W$ инъективно, а модуль F свободен, то произведение

$$f \otimes \mathrm{Id}_F : U \otimes F \to W \otimes F \tag{1-20}$$

также инъективно. Это очевидно, когда $F = K \cdot e$ имеет ранг 1: правила $u \otimes (\lambda e) \mapsto \lambda u$ и $w \otimes (\mu e) \mapsto \mu w$ задают изоморфизмы $U \otimes F \xrightarrow{\sim} U$ и $W \otimes F \xrightarrow{\sim} W$, отождествляющие отображение (1-20) с исходным отображением $f : U \hookrightarrow W$. Свободный модуль F большего ранга является прямой суммой свободных модулей ранга 1, и по предл. 1.3 модули $U \otimes F \simeq U^{\oplus \operatorname{rk} F}$ и $W \otimes F \simeq W^{\oplus \operatorname{rk} F}$ суть прямые суммы $\operatorname{rk} F$ одинаковых копий исходных модулей, а отображение (1-20) действует на них по правилу $(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto (f_1(u_1), f_2(u_2), \dots, f_n(u_n))$ и очевидно инъективно.

Если модуль F не свободен, произведение (1-20) может оказаться не инъективным даже когда $f : U \hookrightarrow W$ это вложение свободных модулей. Например, вложение $\mathbb{Z}$-модулей $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ по правилу $z \mapsto 2z$ при тензорном умножении на $\mathbb{Z}/(2)$ превращается в *нулевое* отображение $f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/(2)} : \mathbb{Z}/(2) \to \mathbb{Z}/(2)$, переводящее $[1]_2$ в $[0]_2$.

Упражнение 1.6. Покажите, что сюрьективность отображения $f : U \twoheadrightarrow W$ всегда влечёт за собой сюрьективность отображения $f \otimes \mathrm{Id}_V : U \otimes V \to W \otimes V$ для любых модулей U, V, W над любым коммутативным кольцом K.

Теорема 1.2
Пусть $U \simeq F/R_U$ и $W \simeq G/R_W$, где F и G — свободные модули над произвольным коммутативным кольцом K, а $R_U \subset F$ и $R_W \subset G$ суть подмодули соотношений, определяющих модули U и W. Тогда

$$U \otimes W \simeq \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W},$$

где $R_U \otimes G + F \otimes R_W$ есть линейная оболочка подмодулей $R_U \otimes G$ и $F \otimes R_W$ свободного модуля $F \otimes G$, вложенных в него согласно прим. 1.4.

Доказательство. Сопоставление элементам $f \pmod{R_U} \in F/R_U$ и $g \pmod{R_G} \in G/R_W$ элемента $f \otimes g \pmod{(R_U \otimes G + F \otimes R_W)}$ корректно, поскольку при $u \in R_U$ и $w \in R_W$

$$(f+u)\otimes(g+w) = f\otimes g + (u\otimes g + f\otimes w + u\otimes w) \equiv f\otimes g \pmod{(R_U \otimes G + F \otimes R_W)},$$

и задаёт билинейное отображение

$$\overline{\tau} : U \times W \to \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W}, \tag{1-21}$$

которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F \times G \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_U \times \pi_W"'] & F \otimes G \arrow[d, "\pi"] \\ U \times W \arrow[r, "\overline{\tau}"] & \frac{F\otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \end{tikzcd} \tag{1-22}$$

где $\pi_U : F \twoheadrightarrow U$, $\pi_W : G \twoheadrightarrow W$ и $\pi : F \otimes G \twoheadrightarrow (F \otimes G)/(R_U \otimes G + F \otimes R_W)$ означают отображения факторизации, а $\tau : F \times G \to F \otimes G$ — универсальное билинейное отображение. Покажем, что билинейное отображение (1-21) тоже универсально.

Всякое билинейное отображение $\varphi : U \times W \to H$ индуцирует полилинейное отображение $\widehat{\varphi} : F \times G \to H$ по правилу

$$(f, g) \mapsto \varphi\,(\,f\,(\mathrm{mod}\,R_U)\,,\;g\,(\mathrm{mod}\,R_W)\,)\;, \tag{1-23}$$

а значит, существует линейное отображение $\psi : F \otimes G \to H$, такое что

$$\psi(f \otimes g) = \varphi\,(\,f\,(\mathrm{mod}\,R_U)\,,\;g\,(\mathrm{mod}\,R_W)\,)\;.$$

Поскольку ψ аннулирует подмодули $R_U \otimes G$ и $F \otimes R_W$, оно корректно спускается до линейного отображения

$$\overline{\psi} : \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \to H\,,$$

такого что $\overline{\psi} \circ \tau = \varphi$. С другой стороны, если линейное отображение

$$\eta : \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \to H$$

тоже удовлетворяет равенству $\eta \circ \tau = \varphi$, то его композиция со стрелками $\overline{\tau}$ и $\pi_U \times \pi_W$ из диаграммы (1-22) задаёт билинейное отображение

$$\eta \circ \overline{\tau} \circ (\pi_U \times \pi_W) : F \times G \to H \tag{1-24}$$

действующее на пару $(f, g) \in F \times G$ в точности по формуле (1-23) и, стало быть, совпадающее равное $\widehat{\psi}$. В силу универсальности τ композиция (1-24) равна $\psi \circ \tau$, откуда в виду коммутативности диаграммы (1-22) вытекает равенство $\eta \circ \pi = \psi$, а с ним и равенство $\eta = \overline{\psi}$. □

§2. Тензорная алгебра

2.1. Тензорные степени векторного пространства. Тензорное произведение n экземпляров векторного пространства V с собой $V^{\otimes n} \overset{\text{def}}{=} V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ называется n-той *тензорной степенью* пространства V. Мы полагаем $V^{\otimes 0} \overset{\text{def}}{=} \Bbbk$ и $V^{\otimes 1} \overset{\text{def}}{=} V$. Тензорное умножение векторов задаёт на бесконечной прямой сумме

$$TV \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

структуру ассоциативной (некоммутативной) градуированной алгебры. Фиксация в пространстве V какого-либо базиса $e_1, e_2, \dots, e_d$ отождествляет эту алгебру с алгеброй многочленов от d некоммутирующих друг с другом переменных e_ν: тензорные мономы $e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_m}$ составят базис векторного пространства TV над $\Bbbk$, а их перемножение будет заключаться в приписывании друг к другу через значок $\otimes$. Компонента $V^{\otimes n} \subset TV$ при такой интерпретации становится пространством однородных тензорных многочленов степени n.

Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* пространства V. Это *свободная ассоциативая* $\Bbbk$*-алгебра*, порожденная пространством V, в том смысле, что вложение

$$\iota : V \hookrightarrow TV \tag{2-1}$$

в качестве подпространства $V^{\otimes 1}$ обладает универсальным свойством, аналогичным универсальному свойству базиса свободного модуля. А именно, для любой ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A и любого $\Bbbk$-линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\alpha : TV \to A$ такой, что $f = \alpha \circ \iota$. Иными словами, гомоморфизмы алгебр $TV \to A$ биективно соответствуют линейным отображениям $V \to A$.

Упражнение 2.1. Проверьте это и убедитесь, что алгебра TV вместе с вложением (2-1) определяется этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с ι.

Предложение 2.1

Для конечномерного пространства V *полная свертка*, сопоставляющая паре разложимых тензоров $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ число

$$\langle\, v \,,\, \xi \,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) \in \Bbbk, \tag{2-2}$$

является невырожденным спариванием между $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ и задаёт изоморфизм

$$\left(V^{\otimes n}\right)^* \simeq (V^*)^{\otimes n} \tag{2-3}$$

Доказательство. Поскольку правая часть (2-2) полилинейна по каждому v_i и ξ_i, правило $v \mapsto \langle\, v \,,\, \xi \,\rangle$ корректно задаёт линейный функционал $V^{\otimes n} \to \Bbbk$. Так как он полилинейно зависит от каждого ξ_i, сопоставление такого функционала разложимому тензору $\xi \in V^{*\otimes n}$ корректно задаёт линейное отображение $V^{*\otimes n} \to \left(V^{\otimes n}\right)^*$. Конечномерность V существенна для проверки его биективности: выбирая двойственные базисы $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$, видим, что отвечающие им базисы из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_s}$ тоже двойственны. □

Следствие 2.1
Сопоставление разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ полилинейной формы $V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$, $(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)$, задаёт для любого конечномерного пространства V канонический изоморфизм

$$(V^*)^{\otimes n} \simeq \mathrm{Hom}(V, \dots, V; \Bbbk). \tag{2-4}$$

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ пространство $\left(V^{\otimes n}\right)^*$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ изоморфно пространству n-линейных форм $V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$. Остаётся взять композицию этого изоморфизма с изоморфизмом (2-3). □

2.1.1. Частичные свертки. Фиксируем пару инъективных не обязательно монотонных отображений $\{1, 2, \dots, p\} \xhookleftarrow{I} \{1, 2, \dots, m\} \xhookrightarrow{J} \{1, 2, \dots, q\}$ и положим $i_\nu = I(\nu)$, $j_\nu = J(\nu)$, так что $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ являются словами одинаковой длины, состоящими из неповторяющихся в пределах каждого слова индексов. Линейный оператор, который для каждого $\nu = 1, 2, \dots, m$ сворачивает i_ν-тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_ν-тым сомножителем в $V^{\otimes q}$, а все остальные тензорные сомножители оставляет в первоначальном порядке:

$$\begin{gathered} c_J^I : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes (p-m)} \otimes V^{\otimes (q-m)}, \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \left(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{j \notin J} v_j\right), \end{gathered} \tag{2-5}$$

называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Отметим, что разные отображения I и J приводят к *разным* отображениям свёртки.

Пример 2.1 (свертка вектора с полилинейной формой)
Интерпретируем n-линейную форму $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ как тензор из $V^{*\otimes n}$ посредством изоморфизма из сл. 2.1. Свёртка этого тензора по первому тензорному сомножителю с произвольно выбранным вектором $v \in V$ лежит в $V^{*\otimes (n-1)}$ и является таким образом $(n-1)$-линейной формой на V, которая получается из исходной формы φ фиксацией вектора v в качестве первого аргумента.

Упражнение 2.2. Убедитесь в этом.

Она называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $v \llcorner \varphi$ или $i_v\varphi$. Итак, $i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$.

2.1.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\operatorname{Supp}(t) \subset V$. Иначе его можно охарактеризовать как наименьшее по включению подпространство $U \subset V$, такое что $t \in U^{\otimes n}$, или как наименьшее по размерности подпространство с таким свойством. Тождественность этих описаний вытекает из того, что включения $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ для некоторых подпространств $U, W \subset V$ влекут включение $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$, в чём легко убедиться, раскладывая t по базису из тензорных мономов, происходящему из такого базиса

$$e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$$

пространства V, в котором e_i образуют базис в $U \cap W$, u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а v_m дополняют объединение всех этих векторов до базиса в V: условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i.

2.1.3. Ранг тензора $t \in V^{\otimes n}$ определяется как размерность его линейного носителя: $\operatorname{rk} t \overset{\text{def}}{=} \dim \operatorname{Supp}(t)$. Тензор t с $\operatorname{Supp}(t) \subsetneq V$ называется *вырожденным*. Говоря неформально, такой t эффективно зависит от меньшего числа «координат», чем имеется в V, т. е. существует линейная замена базиса, уничтожающая в многочлене t часть переменных. Например, если $\dim \operatorname{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \Bbbk$ и $v \in V$, порождающего $\operatorname{Supp}(t)$.

2.1.4. Линейные порождающие носителя. Для нахождения ранга данного тензора t желательно иметь явное описание его носителя как линейной оболочки эффективно вычислимого по t конечного набора векторов. Такое описание даётся в терминах свёрток. Для каждой (не обязательно монотонной) последовательности $J = j_1 j_2 \dots j_{n-1}$ из $n-1$ неповторяющихся индексов $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$c_t^J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{1,2,\dots,(n-1)}_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}(\xi \otimes t) \tag{2-6}$$

полную свёртку с тензором t, вычисляющую ν-й сомножитель в $V^{*\otimes(n-1)}$ на j_ν-том сомножителе t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Результатом такой свёртки является линейная комбинация векторов, стоящих в том тензорном сомножителе тензора t, номер которого не содержится в последовательности J. Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\operatorname{Supp}(t)$.

Теорема 2.1
Пространство $\operatorname{Supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (2-6).

Доказательство. Пусть $\operatorname{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (2-6) линейно порождают W, достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\operatorname{im}\left(c_t^I\right)$, аннулирует и подпространство W. Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$ и ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный базис в W и разложим t по этому базису. Значение

$$\xi\Big(c_t^I\big(\xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}\big)\Big)$$

представляет собою полную свёртку тензора t с базисным тензорным мономом

$$\xi_1 \otimes \xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}$$

по всем n сомножителям в том порядке, что предписан последовательностью J, и равно коэффициенту при соответствующем двойственном мономе в разложении t по базисным тензорным мономам. Выбирая надлежащие J, мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t. Значит, все они нулевые, и w_1 не входит в $\mathrm{Supp}(t)$, что противоречит его выбору. □

2.2. Симметрические и внешние степени. Полилинейное отображение

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to U \tag{2-7}$$

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают.

Упражнение 2.3. Покажите, что значение кососимметричного полилинейного отображения изменяет знак при перестановке любых двух аргументов, а над полем характеристики $\neq 2$ этого условия также и достаточно для кососимметричности.

Симметричные и кососимметричные полилинейные отображения (2-7) составляют в векторном пространстве всех полилинейных отображений $\mathrm{Hom}(V, \dots, V; U)$ подпространства, которые мы будем обозначать, соответственно, через

$$\mathrm{Sym}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U) \quad \text{и} \quad \mathrm{Skew}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U)\,.$$

Взятие композиции фиксированного (косо) симметричного отображения

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to U$$

с линейными операторами $F : U \to W$ задаёт линейное отображения $F \mapsto F \circ \varphi$ из пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ в в пространства $\mathrm{Sym}^n(V, W)$ и $\mathrm{Skew}^n(V, W)$ соответственно. Если для всех W это отображение — изоморфизм, (косо)симметричное полилинейное отображение φ называется *универсальным*. Универсальное симметричное полилинейное отображение обозначается

$$\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to S^n V \tag{2-8}$$

и называется *коммутативным произведением* векторов, а модуль $S^n V$, куда оно действует, называется n-той *симметрической степенью* модуля V. Произведение

$$\sigma(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

обычно обозначается через $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n$ или просто $v_1 v_2 \dots v_n$. Универсальное кососимметричное полилинейное отображение обозначается

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to \Lambda^n V \tag{2-9}$$

и называется *внешним* (или *суперкоммутативным*) произведением векторов, а модуль $\Lambda^n V$, куда оно действует, называется n-той *внешней степенью* модуля V. Произведение $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_n)$ принято обозначать через $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$.

Упражнение 2.4. Покажите, что $S^n V$ и $\Lambda^n V$ (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с (супер) коммутативным умножением.

Модули $S^n V$ и $\Lambda^n V$ строятся как фактор модули $V^{\otimes n}$ по соотношениям (анти) коммутирования. Удобно сделать это одновременно для всех n, рассмотрев факторы свободной ассоциативной алгебры пространства V по надлежащим идеалам.

2.2.1. Симметрическая алгебра пространства V. Рассмотрим в тензорной алгебре TV пространства V двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \subset TV$, порождённый линейным подпространством в $V \otimes V$, натянутым на всевозможные разности

$$u \otimes w - w \otimes u\,. \tag{2-10}$$

Он состоит из конечных линейных комбинаций всевозможных тензоров, которые можно получить из тензоров (2-10), умножая их слева и справа (или одновременно и слева и справа) на любые элементы тензорной алгебры. Пересечение этого идеала с однородной компонентой $V^{\otimes n}$ представляет собою линейную оболочку всевозможных разностей разложимых тензоров вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) - (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots) \tag{2-11}$$

(обозначенные многоточиями фрагменты не меняются), а весь идеал является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n}\right).$$

Фактор алгебра $SV \overset{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\mathrm{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V, а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой (которую принято опускать). Симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n V\,, \quad \text{где} \quad S^n V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Выбор базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ отождествляет алгебру SV с алгеброй $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ обычных коммутативных многочленов от базисных векторов e_i, а подпространство $S^n V \subset \Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ — с пространством однородных многочленов степени n.

Упражнение 2.5. Найдите $\dim S^n V$.

Предложение 2.2
Композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}}$:

$$\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} S^n(V) \tag{2-12}$$

является универсальной симметрической полилинейной формой (т. е. коммутативным умножением (2-8)).

Доказательство. Любое полилинейное отображение $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \to W$ единственным образом разлагается в композицию $\varphi = F \circ \tau$, где $F : V^{\otimes n} \to W$ линейно. При этом F пропускается через π тогда и только тогда, когда

$$F(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) = F(\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots),$$

что равносильно тому что $\varphi(\ldots, v, w, \ldots) = \varphi(\ldots, w, v, \ldots)$. □

Упражнение 2.6. Убедитесь, что SV является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой V, в том смысле, что для любой коммутативной $\Bbbk$-алгебры A и любого линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\tilde{f} : SV \to A$ такой, что $f = \tilde{\varphi} \circ \iota$, где $\iota : V \hookrightarrow SV$ вкладывает V в SV в качестве многочленов первой степени. Проверьте также, что SV и ι определяются этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с ι.

2.2.2. Внешняя алгебра пространства V определяется как фактор алгебра

$$\Lambda V \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{skew}}$$

свободной ассоциативной алгебры TV по двустороннему идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset TV$, порожденному всеми тензорами вида

$$v \otimes v \in V \otimes V. \tag{2-13}$$

Упражнение 2.7. Покажите, что подпространство $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ содержит все суммы

$$v \otimes w + w \otimes v \quad (\text{с любыми } v, w \in V),$$

и если $1 + 1$ обратимо в K, то $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ линейно порождается такими суммами.

Как и в симметричном случае, идеал $\mathcal{I}_{\text{skew}}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}\right)$$

и его компонента n-той степени $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$ является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $(\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots)$ и по упр. 2.7 содержит все суммы вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) + (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots). \tag{2-14}$$

Фактор алгебра ΛV называется *внешней* (или *грассмановой*) алгеброй пространства V. Как и симметрическая алгебра, она является прямой суммой подпространств

$$\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}).$$

Упражнение 2.8. Докажите, что композиция тензорного умножения с факторизацией по идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}}$

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Lambda^n(V) \tag{2-15}$$

является универсальным кососимметричным полилинейным отображением (2-9). Индуцированное умножение в алгебре ΛV называется *внешним* (а также *суперкоммутативным* или *грассмановым*) и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Согласно упр. 2.7 оно меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки.

Выбор базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ отождествляет внешнюю алгебру ΛV с алгеброй *грассмановых многочленов* $\Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ от базисных векторов e_i. Поскольку

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i\,,$$

каждый грассманов моном степени n линеен по всем входящим в него переменным и с точностью до знака записывается произведением

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d\,. \tag{2-16}$$

Лемма 2.1

Мономы (2-16), индекс $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ которых пробегает все строго возрастающие n-элементные последовательности в $\{1, 2, \dots, d\}$, составляют базис пространства $\Lambda^n V$. В частности, $\Lambda^n V = 0$ при $n > \dim V$ и

$$\dim \Lambda^n V = \binom{\dim V}{n}, \quad \dim \Lambda V = 2^{\dim V}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим $\binom{d}{n}$-мерное векторное пространство U, базис которого состоит из символов ξ_I, и зададим кососимметричное полилинейное отображение

$$\alpha : V \times V \times \cdots \times V \to U$$

правилом $(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I$, где $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \dots, j_{\sigma(n)})$ — это единственная *возрастающая* перестановка индексов $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Оно универсально, поскольку для любого кососимметричного полилинейного $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \to W$ правило $F(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$ корректно определяет единственно возможный линейный оператор $F : U \to W$ такой, что $\varphi = F \circ \alpha$. Тем самым, имеется канонический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$, переводящий ξ_I в $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = e_I$. □

2.3. Симметрические и кососимметрические тензоры. Начиная с этого места и до конца параграфа мы будем заниматься конечномерными векторными пространствами над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$.

Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \cdots \otimes v_{g(n)}\,. \tag{2-17}$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, v_2, \dots, v_n$, эта формул корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$.

Определение 2.1

Подпространства $\operatorname{Sym}^n V \stackrel{\text{def}}{=} \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = t \quad \forall g \in S_n \}$ и $\operatorname{Skew}^n V \stackrel{\text{def}}{=} \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t \quad \forall g \in S_n \}$ в тензорной степени $V^{\otimes n}$ называются, соответственно, пространствами *симметричных* и *кососимметричных* тензоров.

2.3.1. Симметризация и альтернирование. Над полем характеристики нуль операторы *симметризации* и *альтернирования*

$$\mathrm{sym}_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} g(t) \;:\quad V^{\otimes n} \to \mathrm{Sym}^n(V) \tag{2-18}$$

$$\mathrm{alt}_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g(t) \;:\quad V^{\otimes n} \to \mathrm{Skew}^n(V) \tag{2-19}$$

являются проекторами n-той тензорной степени $V^{\otimes n}$ на подпространства симметрических и кососимметрических тензоров соответственно.

Упражнение 2.9. Докажите для любых $t \in V^{\otimes n}$, $s \in \mathrm{Sym}^n(V)$ и $a \in \mathrm{Skew}^n(V)$ при всех $n \geqslant 2$ соотношения а) $\mathrm{sym}_n(t) \in \mathrm{Sym}^n(V)$ б) $\mathrm{alt}_n(t) \in \mathrm{Skew}^n(V)$ в) $\mathrm{sym}_n(s) = s$ г) $\mathrm{alt}_n(a) = a$ д) $\mathrm{sym}_n(a) = \mathrm{alt}_n(s) = 0$.

Пример 2.2 (разложение тензорного квадрата)
При $n = 2$ симметризация и альтернирование доставляют прямое разложение

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V). \tag{2-20}$$

В самом деле, поскольку каждый разложимый тензор представляется в виде суммы

$$u\otimes w = \frac{u\otimes w + w\otimes u}{2} + \frac{u\otimes w - w\otimes u}{2} = \mathrm{sym}_2(u\otimes w) + \mathrm{alt}_2(u\otimes w),$$

образы проекторов sym_2 и alt_2 порождают $V^{\otimes 2}$, а т. к. каждый из них по упр. 2.9 аннулирует образ другого, эти образы имеют нулевое пересечение. Если интерпретировать $V^{\otimes 2}$ как пространство билинейных форм на V^*, разложение (2-20) будет ни чем иным, как каноническим разложением билинейной формы в сумму симметрической и кососимметрической.

Пример 2.3 (разложение тензорного куба)
Сравнение размерностей показывает, что при $n = 3$ тензор общего вида *не* является суммой своей симметризации и альтернирования. Чтобы найти в пространстве $V^{\otimes 3}$ дополнительное к $\mathrm{Sym}^3(V) \oplus \mathrm{Skew}^3(V)$ подпространство, рассмотрим разность

$$p = E - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \left(2E - T - T^2\right)/\,3, \tag{2-21}$$

где через $T : V^{\otimes 3} \to V^{\otimes 3}$ обозначен оператор, отвечающий циклической перестановке $|123\rangle \in S_3$, а через $E = T^3$ — тождественный оператор. Поскольку

$$p^2 = \left(4E + T^2 + T - 4T - 4T^2 + 2E\right)/\,9 = \left(2E - T - T^2\right)/\,3 = p,$$

оператор p является проектором.

Упражнение 2.10. Покажите, что:
а) $p\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ p = p\circ\mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3\circ p = 0$ и выведите отсюда, что $V^{\otimes 3}$ является прямой суммой $\mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{im}(p)$
б) $\mathrm{im}(p)$ состоит из 3-линейных форм $\varphi : V^*\times V^*\times V^* \to \Bbbk$, удовлетворяющих

$\forall\, \xi, \eta, \zeta \in V^*$ *тождеству Якоби* $\varphi(\xi,\eta,\zeta)+\varphi(\eta,\zeta,\xi)+\varphi(\zeta,\xi,\eta)=0$, и приведите явный пример такой формы на двумерном пространстве V^* .

При больших n разложение $V^{\otimes n}$ в прямую сумму подпространств тензоров с различными «типами симметрии» становится более сложным и является предметом теории представлений симметрических групп.

2.3.2. Стандартные базисы. В записи симметричного тензора $t \in \operatorname{Sym}^n V$ в виде некоммутативнго многочлена от элементов какого-либо базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$, все тензорные мономы, составляющие одну S_n-орбиту, войдут с одним и тем же коэффициентом, зависящим только от орбиты. Поэтому в качестве базиса пространства $\operatorname{Sym}^n V$ можно взять *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \overset{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c}\text{сумма всех различных тензорных мономов, состоящих из}\\ m_1 \text{ множителей } e_1,\ m_2 \text{ множителей } e_2,\ \dots,\ m_d \text{ множителей } e_d\end{array}\right) \tag{2-22}$$

занумерованные всевозможными наборами $(m_1, m_2, \dots, m_d)$ целых чисел $0 \leqslant m_\nu \leqslant d$ с сумой $\sum_\nu m_\nu = n$.

Упражнение 2.11. Удостоверьтесь, что сумма в правой части (2-22) состоит из

$$\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_d!}$$

попарно различных слагаемых.

Аналогично, базис в $\operatorname{Skew}^n V$ образуют *полные кососимметрические тензоры*

$$e_I = e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle} \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{g(n)}} \tag{2-23}$$

занумерованные строго возрастающими последовательностями $I = i_1 i_2 \dots i_n$ натуральных чисел $1 \leqslant i_\nu \leqslant d$.

Предложение 2.3

Если $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$, то ограничение симметрического умножения[1] $V^{\otimes n} \to S^n V$ на подпространство симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение внешнего умножения[2] $V^{\otimes n} \to \Lambda^n V$ на подпространство кососимметрических тензоров $\operatorname{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные мономы (2-22) и (2-23) задаётся формулами

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \mapsto \frac{(m_1+m_2+\cdots+m_d)!}{m_1!\cdot m_2! \cdots m_d!}\cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d} \tag{2-24}$$

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_d\rangle} \mapsto n!\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_d} \tag{2-25}$$

Доказательство. Проекция каждого из $n!/(m_1!\, m_2! \cdots m_d!)$ слагаемых суммы (2-22) в симметрическую алгебру равна коммутативному моному $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d}$, а проекция каждого из $n!$ слагаемых суммы (2-23) во внешнюю алгебру равна грассманову моному $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$. □

[1] т. е. отображения факторизации по соотношениям коммутирования (2-11)

[2] т. е. отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования (2-14)

Предостережение 2.1. Не смотря на изоморфизмы из предл. 2.3, содержащиеся в $V^{\otimes n}$ *под*пространства $\mathrm{Sym}^n V$ и $\mathrm{Skew}^n V$ ни в коем случае не следует путать с *фактор* пространствами $S^n V$ и $\Lambda^n V$, получающимися из $V^{\otimes n}$ склейкой некоторых тензоров между собою. Над полем положительной характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) = p$ симметричные тензоры, степень которых является степенью p, и кососимметричные тензоры, степень которых больше p, *аннулируются* проекциями $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$. Даже в характеристике нуль стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств *не* отождествляются друг с другом изоморфизмами из предл. 2.3, а переходят лишь в некоторые кратности друг друга. Возникающие при этом поправочные множители необходимо учитывать как при попытке поднять на (супер) симметрические тензоры (супер) коммутативное умножение, которое имеется в симметрической и грассмановой алгебрах, так и при попытке спустить в симметрическую и внешнюю алгебры отображения свёртки, которые имеются между тензорами.

2.4. Поляризация многочленов. По предл. 2.3 над полем нулевой характеристики для любого $f \in S^n V : *$ существует единственная симметричная n-линейная форма

$$\tilde{f} : V \times V \times \ldots \times V \to \Bbbk \tag{2-26}$$

которая отображается в f при факторизации $(V^*)^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V^*$. Она называется *полной поляризацией* однородного многочлена f. При $n = 2$, полная поляризация $\tilde{f}$ представляет собою поляризацию квадратичной формы до до симметричной билинейной, обсуждавшуюся в курсе линейной алгебры. Для произвольного n полная поляризация базисного монома $f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$ степени $\sum m_i = n$ имеет вид[1]

$$\tilde{f} = \frac{m_1!\, m_2! \cdots m_d!}{n!} \cdot x_{[m_1, m_2, \ldots, m_d]} . \tag{2-27}$$

Полная поляризация произвольного многочлена вычисляется отсюда по линейности отображения $f \mapsto \tilde{f}$.

2.4.1. Значение многочлена на векторе. Каждый элемент $f \in S^n V^*$ канонически задаёт функцию $f : V \to \Bbbk$, переводящую вектор $v \in V$ в число

$$\mathrm{ev}_v(f) = f(v) \overset{\text{def}}{=} \tilde{f}(v, v, \ldots, v) \in \Bbbk , \tag{2-28}$$

называемое *значением* многочлена $f \in S^n V^*$ на векторе $v \in V$. Если зафиксировать двойственные друг другу базисы $e_1, e_2, \ldots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \ldots, x_d \in V^*$ и отождествить симметрическую алгебру SV^* с алгеброй многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_d]$, значение многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на векторе $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ будет ничем иным как результатом подстановки в f численных значений координат вектора v

$$f(v) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) . \tag{2-29}$$

Действительно, полная свёртка (2-28) базисного симметричного тензора

$$\tilde{f} = x_{[m_1, m_2, \ldots, m_d]}$$

[1] см. формулу (2-24) на стр. 24

с тензором $v^{\otimes n}$ представляет собой сумму $n!/(m_1!\cdot m_2!\,\cdots\,m_d!)$ одинаковых произведений $x_1(v)^{m_1}\cdot x_2(v)^{m_2}\cdot\,\cdots\,\cdot x_d(v)^{m_d} = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\,\cdots\,\alpha_d^{m_d}$ и совпадает результатом подстановки $(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ в базисный моном

$$f=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\,\cdots\,m_d!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\,\cdots\,x_d^{m_d}\,.$$

Из сказанного вытекает, что результат подстановки координат вектора $v\in V$ в многочлен $f\in S^nV^*$ зависит только от v и f, но не от выбора пары двойственных базисов в V и V^*, используемых для явной записи многочлена и вектора в координатах, и что полная поляризация $\tilde f$ однородного многочлена f однозначно характеризуется как единственная симметричная полилинейная форма от $\deg f$ аргументов, такая что $\tilde f(v,v,\dots,v)=f(v)$ для всех $v\in V$.

2.4.2. Двойственность. Полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует над полем характеристики нуль невырожденное спаривание между пространствами S^mV и S^mV^*, сопоставляющее многочленам $f\in S^nV$ и $g\in S^nV^*$ полную свёртку их полных поляризаций $\tilde f\in V^{\otimes m}$ и $\tilde g\in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 2.12. Проверьте, что ненулевые спаривания между мономами, составленными из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, исчерпываются значениями

$$\left\langle\, e_1^{m_1}e_2^{m_2}\,\cdots\,e_d^{m_d}\,,\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}\,\cdots\,x_d^{m_d}\,\right\rangle=\frac{m_1!\cdot m_2!\cdot\,\cdots\,\cdot m_d!}{n!}\,. \tag{2-30}$$

2.4.3. Частные производные. Внутренне произведение[1] с фиксированным вектором $v\in V$ задаёт отображение $i_v : V^{*\otimes n}\to V^{*\otimes(n-1)}$. Применяя его к полной поляризации $\tilde f$ многочлена $f\in S^n(V^*)$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^nV^*\to S^{n-1}V^*$, которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n}\supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^* \end{tikzcd}$$

и переводит многочлен $f(x)=\tilde f(x,x,\dots\,x)\in S^n(V^*)$ в билинейно зависящий от f и v многочлен $\mathrm{pl}_vf(x)\stackrel{\text{def}}{=}\tilde f(v,x,\dots\,x)\in S^{n-1}(V^*)$, называемый *полярой* v относительно f. При $n=2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики $f=0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $e_1,e_2,\dots,e_d\in V$ и $x_1,x_2,\dots,x_d\in V^*$ свёртка первого тензорного сомножителя в $V^{*\otimes n}$ с вектором $e_i\in V$ переводит базисный симметрический моном (2-22) в точно такой же базисный моном, но только содержащий (m_i-1) множителей e_i, или в нуль, если $m_i=0$. Поэтому, по формуле (2-24) из предл. 2.3

$$\mathrm{pl}_{e_i}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\,\cdots\,x_d^{m_d}=\frac{m_i}{n}\,x_1^{m_1}\cdots x_{i-1}^{m_{i-1}}x_i^{m_i-1}x_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots x_d^{m_d}= =\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}\,\cdots\,x_d^{m_d}\,.$$

[1] см. прим. 2.1 на стр. 17

Из линейности $\mathrm{pl}_v f$ по v и f мы получаем, что поляра вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно многочлена f есть делённая на $\deg f$ *производная* от f в направлении v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\,\partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Отметим, что из предыдущего вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в V и V^*, а также соотношение $\partial_u\partial_w = \partial_w\partial_u$ и замечательное равенство между кратными производными

$$m!\ \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n!\ \tilde f(\underbrace{u,u,\ \dots\ ,u}_{m},\underbrace{w,w,\ \dots\ ,w}_{n}) = (n-m)!\ \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u)\,, \tag{2-31}$$

для любых $u, w \in V$, любого $f \in S^nV^*$ и любого m в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$.

Упражнение 2.13. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f\cdot g) = \partial_v(f)\cdot g + f\cdot\partial_v(g)$.

2.4.4. Формула Тейлора. Поскольку полилинейная форма $\tilde f$ симметрична, её аргументы можно писать в любом порядке. Условимся писать $\tilde f(u^m, w^{n-m})$, когда какие-то m аргументов формы $\tilde f$ равны u, а остальные $(n-m)$ равны w. Дословный повтор рассуждения, использованного при раскрытии скобок в биноме $(u+w)^n$, выводит из полилинейности и симметричности формы $\tilde f$ равенство

$$\tilde f(u+w,\, u+w,\, \dots,\, u+w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \tilde f(u^m, w^{n-m}), \quad \text{где} \quad n = \deg f\,.$$

Формула (2-31) позволяет переписать его как *разложение Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\,\partial_w^m f(u), \tag{2-32}$$

которое представляет собою *точное равенство*, справедливое для любого многочлена $f \in S^nV^*$ и произвольных векторов $u, w \in V$. Отметим, что правая часть (2-32) симметрична по u и w в виду соотношений (2-31).

Упражнение 2.14. Докажите для любого многочлена $f \in S^nV^*$ и любых n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ равенство $\tilde f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dfrac{1}{n!}\,\partial_{v_1}\partial_{v_2}\ \dots\ \partial_{v_n} f$.

2.4.5. Линейный носитель многочлена $f \in S^nV^*$ определятся как минимальное подпространство $W \subset V^*$, такое что $f \in S^nW^*$, и обозначается $\mathrm{Supp}(f)$. Он совпадает с линейным носителем полной поляризации $\tilde f \in \mathrm{Sym}^n V^*$ многочлена f и по теор. 2.1 совпадает с образом отображения $V^{\otimes(n-1)} \to V^*$, задаваемого полной свёрткой[1] с $\tilde f$. Тем самым, $\mathrm{Supp}(f)$ представляет собою линейную оболочку всех $(n-1)$-кратных частных производных

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x)\,, \quad \text{где} \quad \sum m_\nu = n-1\,. \tag{2-33}$$

[1] из-за симметричности тензора $\tilde f$ такая свёртка не зависит от выбора последовательности индексов J, по которым она производится

Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-33) даёт ровно один коэффициент многочлена f — тот, что стоит при мономе $x_1^{m_1}\dots x_{i-1}^{m_{i-1}}x_i^{m_i+1}x_{i+1}^{m_{i+1}}\dots x_d^{m_d}$. Поэтому, если записать многочлен f в виде

$$f=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_d=n}\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_d}\,x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\,\cdots\,x_d^{\nu_d}\,, \tag{2-34}$$

то линейная форма (2-33) будет иметь вид

$$n!\cdot\sum_{i=1}^{d}a_{m_1\dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d}x_i\,. \tag{2-35}$$

Всего таких форм будет[1] $\binom{n+d-2}{d-1}$.

Следствие 2.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk)=0$ однородный многочлен (2-34) тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда ранг $d\times\binom{n+d-2}{d-1}$-матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-35), равен единице. В этом случае форма φ, такая что $\varphi^n=f$, также пропорциональна формам (2-35).

Доказательство. Равенство $f=\varphi^n$ означает, что $\mathrm{Supp}(f)$ одномерен и порождён формой φ. В этом случае все формы (2-35) пропорциональны форме φ. Наоборот, если все формы (2-35) пропорциональны, и $\psi\neq 0$ — одна из них, то $\mathrm{Supp}(f)=\Bbbk\cdot\psi$ и $f=\lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda\in\Bbbk$. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то $f=\varphi^n$ для $\varphi=\sqrt[n]{\lambda}\cdot\psi$. □

Пример 2.4 (бинарные формы ранга 1)
Однородный многочлен степени n от двух переменных $f(x_0,x_1)=\sum\limits_k a_k\cdot\binom{n}{k}\cdot x_0^{n-k}x_1^k$ является чистой n-той степенью $(\alpha_0x_0+\alpha_1x_1)^n$ линейной формы, если и только если

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix}a_0&a_1&\dots&a_{n-1}\\a_1&a_2&\dots&a_n\end{pmatrix}=1\,,$$

что равносильно выполнению квадратичных соотношений $a_ia_{j+1}=a_{i+1}a_j$ на коэффициенты a_i многочлена f. В этом случае коэффициенты линейной формы удовлетворяют при всех i соотношению $\alpha_0a_{i+1}=a_i\alpha_1$.

2.5. Поляризация грассмановых многочленов. Каждому однородному грассманову многочлену $\omega\in\Lambda^nV^*$ над полем характеристики нуль согласно предл. 2.3 однозначно соответствует n-линейная кососимметричная форма $\widetilde{\omega}:V\times V\times\dots\times V\to\Bbbk$, которая проектируется в ω при факторизации $V^{*\otimes n}\twoheadrightarrow\Lambda^nV$. Эта форма называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω. По форм. (2-25) на стр. 24 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega=e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$ равна

$$\widetilde{\omega}=\frac{1}{n!}\,e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle}=\mathrm{alt}_n\left(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\dots\otimes e_{i_n}\right)\,, \tag{2-36}$$

а поляризации произвольных многочленов вычисляются отсюда по линейности.

[1] количество способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1,m_2,\dots,m_d$

2.5.1. Двойственность. Как и в симметрическом случае, над полем характеристики нуль между пространствами грассмановых многочленов $\Lambda^n V^*$ и $\Lambda^n V$ имеется каноническое невырожденное спаривание, переводящее $\omega \in \Lambda^n V^*$ и $\tau \in \Lambda^n V$ в полную свёртку $\langle \widetilde{\omega}, \widetilde{\tau} \rangle \in \Bbbk$ их полных поляризаций $\widetilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ и $\widetilde{\tau} \in V^{\otimes n}$.

Упражнение 2.15. Покажите, что свёртка базисных грассмановых мономов $e_I \in \Lambda^n V$ и $x_J \in \Lambda^n V^*$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* отлична от нуля только при[1] $I = J$ и равна в этом случае $1/n!$.

2.5.2. Частные производные в грассмановой алгебре. По аналогии с симметрическим случаем, определим *грассманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \stackrel{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_v \omega\,,$$

в которой через $\mathrm{pl}_v : \Lambda^n V^* \to \Lambda^{n-1} V^*$ обозначена нижняя горизонтальная стрелка коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Skew}^n V^* & \xrightarrow{i_v} & V^{*\otimes(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^n V^* & \xrightarrow{\mathrm{pl}_v} & \Lambda^{n-1} V^* \end{array}$$

переводящая грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V^*$ в проекцию внутреннего произведения $i_v \widetilde{\omega} \in V^{*\otimes(n-1)}$ во внешнюю степень $\Lambda^{n-1} V^*$. Из билинейности $\mathrm{pl}_v \omega$ по v и ω мы заключаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией производных в направлениях базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i \, \partial_{e_i}\,.$$

Кроме того, из определения очевидно, что $\partial_{e_j} \omega = 0$, если ω не зависит от x_j. Таким образом, ненулевой вклад в $\partial_v \omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$ вносят только $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \dots, \partial_{e_{i_n}}$. Из формулы (2-36) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ строго возрастающую последовательность или нет. Иначе говоря, частная производная грассманова монома вдоль базисного вектора, двойственного к самому левому сомножителю, действует как обычная частная производная $\partial/\partial x_{i_1}$. При дифференцировании по остальным направлениям возникают знаки:

$$\begin{aligned} \partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n}\,. \end{aligned}$$

[1]мы предполагаем, что обе последовательности индексов I, J строго возрастают

Тем самым, дифференцирование грассманова монома в направлении базисного вектора, двойственного к k-той слева переменной, ведёт себя как $(-1)^{k-1}\partial/\partial x_{i_k}$. Удобно воспринимать это явление как *грассманово правило Лейбница*

$$\partial_v(\omega\wedge\tau)=\partial_v(\omega)\wedge\tau+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge\partial_v(\tau) \qquad (2\text{-}37)$$

Упражнение 2.16. Докажите справедливость формулы (2-37) для любых однородных грассмановых многочленов $\omega,\tau\in\Lambda V^*$ и любого вектора $v\in V$.

Кососимметричность полной поляризации $\widetilde{\omega}(u,w,*,\dots,*)=-\widetilde{\omega}(w,u,*,\dots,*)$ влечёт за собою равенство $i_w i_v=-i_w i_v$ для отображений $\mathrm{Skew}^n(V^*)\to\mathrm{Skew}^{n-2}(V^*)$. Поэтому грассмановы частные производные *антикоммутируют* между собой:

$$\partial_u\partial_w=-\partial_w\partial_u\,.$$

В частности, $\partial_v^2\omega\equiv 0$ для любых v и ω.

2.5.3. Линейный носитель грассманова многочлена $\omega\in\Lambda^n V$ это наименьшее подпространство $W\subset V$, такое что $\omega\in\Lambda^n W$. Оно обозначается $\mathrm{Supp}(\omega)$ и совпадает с носителем поляризации $\widetilde{\omega}$. По теор. 2.1 носитель грассманова многочлена степени n является образом отображения $V^{*\otimes(n-1)}\to V$, задаваемого полной свёрткой[1] с тензором $\widetilde{\omega}$ и линейно порождается векторами

$$\partial_J\omega\overset{\text{def}}{=}\partial_{e_{j_1}}\partial_{e_{j_2}}\dots\partial_{e_{j_{n-1}}}\omega\,,$$

где $J=j_1j_2\,\dots\,j_{n-1}$ пробегает всевозможные последовательности из $n-1$ неповторяющихся[2] натуральных чисел $1\leqslant j_\nu\leqslant d$. Если записать ω в виде суммы

$$\omega=\sum_I a_Ie_I=\sum_{i_1i_2\dots i_n}\alpha_{i_1i_2\dots i_n}e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$$

в которой $I=i_1i_2\,\dots\,i_n$ пробегает произвольные последовательности неповторяющихся индексов и коэффициенты $\alpha_{i_1i_2\dots i_n}$ кососимметричны по $i_1i_2\,\dots\,i_n$, вклад в $\partial_J\omega$ дадут только мономы a_Ie_I с $I\supset J$. В итоге, с точностью до общего знака,

$$\partial_J\omega=\pm\sum_{i\notin J}\alpha_{j_1j_2\dots j_{n-1}i}\,e_i\,. \qquad (2\text{-}38)$$

Предложение 2.4
Следующие условия на грассманов многочлен $\omega=\sum\limits_{i_1i_2\dots i_n}\alpha_{i_1i_2\dots i_n}e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$, где коэффициенты $\alpha_{i_1i_2\dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1i_2\,\dots\,i_n$, эквивалентны:

1) $\omega=u_1\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_n$ для некоторых $u_1,u_2,\dots,u_n\in V$

[1] в силу кососимметричности тензора $\widetilde{\omega}$ такая свёртка с точностью до знака не зависит от выбора последовательности сворачиваемых сомножителей

[2] в силу кососимметричности грассмановых частных производных можно было бы ограничиться только строго возрастающими последовательностями, но мы умышленного не делаем этого, чтобы упростить запись дальнейших формул

2) $u \wedge \omega = 0\ \ \forall\, u \in \operatorname{Supp}(\omega)$

3) для любых наборов неповторяющихся индексов $i_1 i_2 \dots i_{m+1}$ и $j_1 j_2 \dots j_{m-1}$ выполняется *соотношение Плюккера*[1] $\sum\limits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0$.

Доказательство. Условие (1) означает, что многочлен ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \operatorname{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\operatorname{Supp}(\omega)$. Его равносильность условию (2) вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 2.17. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Соотношение Плюккера выражает обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $\partial_{j_1 \dots j_{m-1}} \omega \wedge \omega$ и является координатной записью условия (2) на вектор $u = \partial_{j_1 \dots j_{m-1}} \omega$ из формулы (2-38). Поскольку такие векторы линейно порождают пространство $\operatorname{Supp}(\omega)$, соотношения Плюккера равносильны условию (2). □

Упражнение 2.18. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

[1] «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить

§3. Симметрические функции

3.1. Симметрические и кососимметрические многочлены. Симметрическая группа S_n действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ переставляя переменные:

$$gf(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots, x_{g(n)}) \qquad \forall\, g \in S_n\,. \tag{3-1}$$

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ называется *симметрическим*, если $gf = f$ для всех $g \in S^n$, и *кососимметрическим*, если $g(t) = \operatorname{sgn}(g)\cdot t$ для всех $g \in S^n$. Симметрические многочлены образуют в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ подкольцо, а кососимметрические многочлены — модуль над этим кольцом[1]. (Косо)симметрические многочлены можно иначе воспринимать как (косо)симметричные тензоры в n-той тензорной степени $\Bbbk[t]^{\otimes n}$ кольца многочленов $\Bbbk[t]$ от одной переменной: изоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей

$$\varkappa : \mathbb{Z}[t]^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad t^{m_1} \otimes t^{m_2} \otimes \cdots \otimes t^{m_n} \mapsto x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \tag{3-2}$$

(номера тензорных сомножителей слева соответствуют номерам переменных справа) перестановочен с действием S_n и отождествляет (косо)симметричные тензоры слева с (косо)симметрическими многочленами справа. Умножению многочленов в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ отвечает при этом покомпонентное умножение

$$\left(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n\right) \cdot \left(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n\right) = (f_1 g_1) \otimes (f_2 g_2) \otimes \cdots \otimes (f_n g_n)\,.$$

Упражнение 3.1. Проверьте, что так определённое умножение наделяет $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$ структурой коммутативного кольца с единицей $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$.

Изоморфизм (3-2) переводит описанные в формулах (2-22) и (2-23) на 24 стандартные базисы $\mathbb{Z}$-модулей $\operatorname{Sym}^n(\mathbb{Z}[t])$ и $\operatorname{Skew}^n(\mathbb{Z}[t])$ в стандартные базисы $\mathbb{Z}$-модулей симметрических и кососимметрических многочленов, которые называются *мономиальным* и *детерминантным*.

3.1.1. Мономиальный базис модуля симметрических многочленов состоит из *мономиальных симметрических многочленов*

$$m_\lambda = (\text{сумма всех мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n})\,, \tag{3-3}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ пробегает диаграммы Юнга из $\leqslant n$ строк. Поскольку любой симметрический многочлен вместе с каждым своим мономом содержит (с одинаковыми коэффициентами) все мономы из его S_n-орбиты, и каждая S_n-орбита однозначно определяется своим лексикографически старшим мономом, показатели которого слева направо не убывают, любой симметрический многочлен однозначно представляется в виде целочисленной линейной комбинации многочленов m_λ . Прообразом многочлена m_λ при изоморфизме (3-2) является стандартный базисный симметрический тензор (2-22), равный сумме всех различных тензорных произведений из $m_0(\lambda)$ сомножителей $t^0 = 1$, $m_1(\lambda)$ сомножителей t^1, $m_2(\lambda)$ сомножителей t^2 и т. д., где $m_i(\lambda)$ равно числу строк длины i в диаграмме λ .

[1] т. к. произведение симметрического многочлена на кососимметрический — это кососимметрический многочлен

3.1.2. Детерминантный базис модуля кососимметрических многочленов состоит из альтернированных S_n-орбит

$$\Delta_\nu = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n}\,. \tag{3-4}$$

Поскольку в кососимметрическом многочлене нет мономов, содержащих одинаковые степени разных переменных[1], индекс ν в (3-4) пробегает множество диаграмм Юнга с неповторяющимися длинами строк $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$. Такая диаграмма ν всегда содержит в себе минимальную треугольную диаграмму δ из n строк разной длины

$$\delta = ((n-1),\,(n-2),\,\dots,\,1,\,0)\,.$$

Разность $\lambda = \nu - \delta = ((\nu_1 - n + 1),\,(\nu_2 - n + 2),\,\dots,\,(\nu_{n-1} - 1),\,\nu_n)$ имеет $\lambda_i = \nu_i - n + i$ и представляет собою уже произвольную диаграмму Юнга из $\leqslant n$ строк без ограничений на их длины. Иногда бывает удобно нумеровать базис (3-4) именно такими диаграммами λ , и в этих случаях мы будем писать $\Delta_{\lambda+\delta}$ вместо Δ_ν .

Легко видеть, что многочлен (3-4) представляет собою определитель[2]

$$\Delta_\nu = \det(x_j^{\nu_i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix} \tag{3-5}$$

Упражнение 3.2. Убедитесь в этом прямым раскрытием правой части (3-5).

В частности, при $\nu = \delta$ получаем *определитель Вандермонда*

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)\,. \tag{3-6}$$

Упражнение 3.3. Убедитесь в справедливости равенства $\Delta_\delta = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$.

3.1.3. Базис Шура. Поскольку любой кососимметрический многочлен f обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$, а так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на их произведение $\Delta_\delta = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$, и частное $f/\Delta_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ является симметрическим многочленом. Мы получаем

[1] при транспозиции любых двух переменных многочлен должен менять знак

[2] здесь и далее запись $(f(i,j))$, где $f(i,j)$ некоторая функция от i, j, будет означать матрицу, в i-той строке и j-том столбце которой стоит результат применения функции f к данным значениям i и j

Предложение 3.1
Умножение на определитель Вандермонда Δ_δ задаёт биекцию между симметричными и кососимметричными многочленами. Эта биекция является изоморфизмом модулей над кольцом симметрических многочленов (и $\mathbb{Z}$-модулей). □

Следствие 3.1
Многочлены[1] $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более n строк, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов.

3.2. Элементарные симметрические многочлены. Лежащие в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n]$ коэффициенты многочлена

$$E(t) = \prod_i (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) \cdot t^k \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n][t] \tag{3-7}$$

называются *элементарными симметрическими многочленами*. Раскрывая скобки, получаем $e_0 = 1$ и

$$e_k(x) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \tag{3-8}$$

(сумма всех произведений из k различных переменных, где $k \geqslant 1$). Эти же многочлены возникают в *формулах Виета*: если $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n$ являются корнями приведённого многочлена

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i), \tag{3-9}$$

то $a_i = (-1)^i e_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n)$.

3.2.1. Разложение по мономиальному базису. Для любого набора неотрицательных целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_m$ положим

$$e_\lambda \overset{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_m} = \prod_{k=1}^{m} e_{\lambda_k} .$$

Если λ — диаграмма Юнга, а λ^t получена из нё транспонированием, то лексикографически старший мономом многочлена e_λ равен $x_1^{\lambda_1^t} x_2^{\lambda_2^t} \dots x_n^{\lambda_n^t}$ и возникает при перемножении монома $x_1 \dots x_{\lambda_1}$ из e_{λ_1}, монома $x_1 \dots x_{\lambda_2}$ из e_{λ_2} и т. д. вплоть до $x_1 \dots x_{\lambda_m}$ из e_{λ_m}. Это продуктивно представлять себе как результат перемножения букв $x_1, x_2, \dots , x_n$, расставленных в клетки диаграммы λ так, что x_1 стоит во всех клетках первого столбца, x_2 — во всех клетках второго и т. д. В результате показатель у переменной x_i будет равен длине i-того столбца диаграммы λ, т. е. длине i-той строки *транспонированной*[2] диаграммы λ^t.

Итак, разложение многочлена e_λ по базису m_λ из мономиальных симметрических многочленов (3-3) имеет вид:

$$e_\lambda = m_{\lambda^t} + (\text{лексикографически младшие члены}) \tag{3-10}$$

[1]многочлены $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda} / \Delta_\delta$ называются (*детерминантными*) *многочленами Шура*

[2]диаграммы Юнга, получающиеся друг из друга отражением относительно главной диагонали (как при транспонировании матрицы) называются *сопряжёнными* или *транспонированными*

Предложение 3.2
Многочлены $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_m}$, где λ пробегает диаграммы Юнга, содержащие не более n столбцов, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Доказательство. Многочлены e_λ нумеруются диаграммами λ из не более n столбцов, элементы мономиального базиса m_μ модуля симметрических функций — диаграммами из не более n строк. Выпишем векторы m_μ в строку в порядке лексикографического возрастания диаграмм μ, а векторы e_λ — в порядке лексикографического возрастания транспонированных диаграмм λ^t. Формула (3-10) утверждает теперь, что матрица координат векторов e_λ в мономиальном базисе m_λ верхнетреугольная с единицами по главной диагонали. Поскольку такая целочисленная матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены e_λ также образуют базис. □

Следствие 3.2
Многочлены $e_1, e_2, \dots, e_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен однозначно записывается в виде многочлена от $e_1, e_2, \dots, e_n$. Иначе говоря, кольцо симметрических функций совпадает с $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_n]$, канонически вложенным в $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_n]$ в качестве наименьшего подкольца, содержащего все e_i.

Доказательство. Переписывая многочлен e_λ как $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$, где m_i — это число строк длины i в диаграмме λ, видим, что множество многочленов e_λ — это в точности множество всех различных мономов от $e_1, e_2, \dots, e_n$. □

Следствие 3.3
Всякий симметрический многочлен от корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ приведённого многочлена (3-9) является многочленом от его коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$, а всякая симметрическая рациональная функция от корней произвольного (не обязательно приведённого) многочлена является рациональной функцией от его коэффициентов. □

3.3. Полные симметрические многочлены. Обозначим через $h_k(x) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сумму всех мономов степени k. Многочлен h_k называется *полным симметрическим многочленом* степени k. Он равен коэффициенту при t^k у формального степенного ряда $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n][[t]]$, возникающего при перемножении n бесконечных геометрических прогрессий[1]

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod_i \left(1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \cdots\right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x) \cdot t^k . \tag{3-11}$$

Поэтому $H(t)E(-t) = 1$. Вычисляя в этом равенстве коэффициент при t^k получаем рекурсивные формулы, выражающие e_i и h_i друг через друга:

$$(-1)^k h_k = e_k - e_{k-1} h_1 + e_{k-2} h_2 - \cdots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} \tag{3-12}$$

$$(-1)^k e_k = h_k - h_{k-1} e_1 + h_{k-2} e_2 - \cdots + (-1)^{k-1} h_1 e_{k-1} . \tag{3-13}$$

[1] беря в i-той скобке m_i-тое слагаемое и перемножая их между собой, получаем $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$

Предложение 3.3
Отображение ω, переводящее многочлен e_k в многочлен h_k (при $k = 1, \ldots, n$) является инволютивным автоморфизмом кольца симметрических многочленов.

Доказательство. Так как кольцо симметрических функций изоморфно кольцу многочленов от $e_1, e_2, \ldots, e_n$, отображение $e_k \mapsto h_k$ однозначно продолжается до гомоморфизма ω из кольца симметрических функций в себя. Из рекурсивных формул (3-12) и (3-13) вытекает, что этот гомоморфизм переводит h_k обратно в e_k, т. е. является инволюцией и, как следствие, автоморфизмом. $\square$

Следствие 3.4
Многочлены $h_1, h_2, \ldots, h_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и любой симметрический многочлен (в том числе h_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена от $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

3.4. Степенные суммы Ньютона. Сумма k-тых степеней всех переменных

$$p_k(x) = \sum_i x_i^k \tag{3-14}$$

называется k-тым *симметрическим многочленом Ньютона*. Многочлены $p_k(x)$ с $k \geqslant 1$ удобно воспринимать как коэффициенты ряда

$$\begin{aligned} P(t) = \sum_{k\geqslant 1} p_k(x) \cdot t^{k-1} &= \sum_i \sum_{k\geqslant 1} x_i^k \cdot t^{k-1} = \sum_i \frac{d}{dt} \sum_{k\geqslant 1} x_i^k \cdot \frac{t^k}{k} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_i \ln(1 - x_i \cdot t) = \frac{d}{dt} \ln \prod_i \frac{1}{1 - x_i \cdot t} = \frac{d}{dt} \ln H(t) \end{aligned} \tag{3-15}$$

который является логарифмической производной от ряда $H(t) = 1 / E(-t)$. Таким образом,

$$P(t) = H'(t) / H(t) = E'(-t) / E(-t).$$

Сравнивая коэффициенты при t^{k-1} в равенствах

$$H(t)P(t) = H'(t) \quad \text{и} \quad E(-t)P(t) = E'(-t),$$

получаем рекурсивные *формулы Ньютона* для выражения p_k через h_k и e_k соответственно:

$$p_k = kh_k - h_{k-1}p_1 - h_{k-2}p_2 - \cdots - h_1 p_{k-1} \tag{3-16}$$

$$(-1)^{k-1}p_k = ke_k - e_{k-1}p_1 + e_{k-2}p_2 - \cdots + (-1)^{k-1}e_1 p_{k-1}. \tag{3-17}$$

Индукция по k показывает, что многочлен p_k является собственным вектором инволюции ω из предл. 3.3 с собственным значением $(-1)^{k-1}$:

$$\omega(p_k) = (-1)^{k-1}p_k. \tag{3-18}$$

Следствие 3.5

Многочлены $p_1, p_2, \dots, p_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами (в том числе p_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена с рациональными коэффициентами от $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Доказательство. Из формулы (3-17) вытекает, что в пространстве многочленов с рациональными коэффициентами от $x_1, x_2, \dots, x_n$, степень которых не превышает N, где $N \in \mathbb{N}$ — любое, $\mathbb{Q}$-линейные оболочки всевозможных мономов $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$ от $p_1, p_2, \dots, p_n$ и всевозможных мономов $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$ от $e_1, e_2, \dots, e_n$ совпадают. Поскольку количества этих мономов при фиксированном N одинаковы, и по сл. 3.4 мономы $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$ линейно независимы, мономы $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$ также линейно независимы. □

3.4.1. Явное выражение e_k и h_k через p_k. Для любого конечного набора невозрастающих неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, состоящего из m_1 единиц, m_2 двоек, m_3 троек и т. д. положим[1] $m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{|\lambda|}$ и

$$\begin{aligned} p_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} p_{\lambda_3} \cdots = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots \\ \varepsilon_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\sum (k-1) m_k} = (-1)^{|\lambda|} (-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum (\lambda_i - 1)} \\ z_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_k \left(m_k! \cdot k^{m_k} \right) . \end{aligned} \tag{3-19}$$

а также условимся в дальнейшем не различать между собою наборы λ, получающиеся друг из друга приписыванием справа любого количества нулей. Множество многочленов вида p_λ это в точности множество всевозможных мономов от p_i. Переход от нумерации мономов диаграммами Юнга к их обычному представлению при помощи набора показателей степеней это переход от невозрастающей последовательности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ длин строк диаграммы к целочисленному вектору $m(\lambda)$, i-тая компонента которого равна количеству строк длины i в λ. В частности, все многочлены p_λ являются собственными векторами инволюции ω:

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \cdot p_\lambda . \tag{3-20}$$

Упражнение 3.4. Покажите, что для любой диаграммы Юнга λ число z_λ равно количеству перестановок в симметрической группе $S_{|\lambda|}$, коммутирующих с произвольным образом фиксированной перестановкой циклового типа λ, и что всего в $S_{|\lambda|}$ имеется $|\lambda|!/z_\lambda$ перестановок циклового типа λ.

Предложение 3.4

Многочлены e_k и h_k выражаются через $\mathbb{Q}$-базис p_λ по формулам:

$$h_k = \sum_{|\lambda|=k} z_\lambda^{-1} p_\lambda \tag{3-21}$$

$$e_k = \sum_{|\lambda|=k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda \tag{3-22}$$

[1] отметим, что $\sum_k k \cdot m_k = |\lambda|$

(суммирование по всем k-клеточным диаграммам Юнга).

Доказательство. Достаточно доказать формулу (3-21), формула (3-22) получается из неё применением инволюции ω из предл. 3.3. Согласно (3-15)

$$H(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\sum p_i t^i/i} = \prod e^{p_i t^i/i} = \prod_{i\geqslant 1}\sum_{m\geqslant 0}\frac{p_i^m}{i^m m!}\,t^{im}.$$

Коэффициент при t^k в правой части возникает при выборе в i-той перемножаемой скобке m_i-того слагаемого так, чтобы $\sum\limits_i i\cdot m_i = k$. Такие выборы биективно соответствуют диаграммам Юнга λ веса k, имеющих m_1 строк длины 1, m_2 строк длины 2 и т. д., а произведение слагаемых, отвечающих такому выбору, равно p_λ / z_λ. □

3.5. Формула Джамбелли выражает детерминантные многочленами Шура s_λ через полные симметрические многочлены h_k в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Для её получения обозначим через $e_k^{(p)}(x)$ результат подстановки в $e_k(x)$ значения $x_p = 0$. Таким образом, $e_k^{(p)}$ — это элементарная симметрическая функция от $(n-1)$ переменных

$$(x_1, \dots, \hat{x}_p, \dots, x_n),$$

где «крышка» означает пропуск переменной x_p. Производящая функция для многочленов $e_k^{(p)}$ с фиксированным p имеет вид

$$E^{(p)}(t) = \sum_k e_k^{(p)}(x)\cdot t^k = \prod_{i\neq p}(1 + x_i t).$$

Поэтому $H(t)E^{(p)}(-t) = (1 - x_p t)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при t^k в обеих частях, получаем соотношение

$$h_0\cdot(-1)^k e_k^{(p)} + h_1\cdot(-1)^{k-1}e_{k-1}^{(p)} + \dots + h_k\cdot e_0^{(p)} = x_p^k,$$

справедливое для всех целых неотрицательных k, если положить $e_j^{(p)} = 0$ при $j > n-1$. С учётом этого замечания предыдущую формулу можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_p^k &= h_{k-n+1}\cdot(-1)^{n-1}e_{n-1}^{(p)} + h_{k-n+2}\cdot(-1)^{n-2}e_{n-2}^{(p)} + \dots + h_k\cdot e_0^{(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_{k-n+j}\cdot(-1)^{n-j}e_j^{(p)}. \end{aligned} \tag{3-23}$$

и воспринимать как произведение строки $\left(h_{k-n+1}, h_{k-n+2}, \dots, h_k\right)$ длины n на столбец

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_2^{(p)} \\ -e_1^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

высоты n. Если организовать h-строки, отвечающие каким-нибудь n фиксированным строго убывающим значениям $k = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_n$, в матрицу[1]

$$H_\nu = \left(h_{\nu_i - n + j}\right) = \begin{pmatrix} h_{\nu_1-n+1} & h_{\nu_1-n+2} & \cdots & h_{\nu_1} \\ h_{\nu_2-n+1} & h_{\nu_2-n+2} & \cdots & h_{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{\nu_n-n+1} & h_{\nu_n-n+2} & \cdots & h_{\nu_n} \end{pmatrix}$$

а e-столбцы, отвечающие n различным значениям $p = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$, — в матрицу

$$M = \left((-1)^{n-i} e^{(j)}_{n-i}\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}e^{(1)}_{n-1} & (-1)^{n-1}e^{(2)}_{n-i} & \cdots & (-1)^{n-1}e^{(n)}_{n-1} \\ (-1)^{n-2}e^{(1)}_{n-2} & (-1)^{n-2}e^{(2)}_{n-i} & \cdots & (-1)^{n-2}e^{(n)}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

то формула (3-23) превратится в матричное равенство $D_\nu = H_\nu \cdot M$, где

$$D_\nu = (x_j^{\nu_i}) = \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}$$

Таким образом, для любой диаграммы Юнга ν со строго убывающими длинами строк

$$\Delta_\nu = \det D_\nu = \det H_\nu \cdot \det M\,.$$

При $\nu = \delta$ матрица H_δ верхняя унитреугольная. Поэтому $\det H_\delta = 1$ и

$$\det M = \det D_\delta = \Delta_\delta\,.$$

Мы получаем искомое выражение полиномов Шура через полные симметрические функции:

$$s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda} / \Delta_\delta = \det D_{\delta+\lambda} / \det M = \det H_{\delta+\lambda} = \det\left(h_{\lambda_i + j - i}\right) \tag{3-24}$$

Предложение 3.5 (формула Джамбелли)

$$s_\lambda = \det \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \ddots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & h_{\lambda_{n-1}+1} \\ h_{\lambda_n-n+1} & \ddots & h_{\lambda_n-1} & h_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{3-25}$$

где по главной диагонали матрицы стоят $h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \dots, h_{\lambda_n}$, и при движении вдоль её строк слева направо индексы у h с каждым шагом увеличиваются на единицу. □

[1] в которой мы полагаем $h_0 = 1$ и $h_j = 0$ при $j < 0$

3.5.1. Примеры. При $n = 2$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_1 h_2 - h_3 = e_1 e_2 - e_3 .$$

При $n = 3$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1,0)} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix}$$

что приводит к тому же самому выражению $s_{(2,1)}$ через h_i, что и при $n = 2$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что выражение s_λ через h_k, полученное при числе переменных n, равном высоте диаграммы λ, сохраняется и при любом большем числе переменных.

Беря $\lambda = (k)$, т. е. одну строку длины k, получаем равенство $s_{(k)} = h_k$, очевидное при $n = 1$ и по упр. 3.5 справедливое для всех n. Отметим, что при непосредственном вычислении определителей $\Delta_{\delta+(n)}$ и Δ_δ произвольного размера $n \times n$ равенство $\Delta_{\delta+(n)} = h_k \cdot \Delta_\delta$ не вполне очевидно.

3.6. Формула Пьери выражает произведение $s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)}$ через многочлены s_μ. Для её вывода нам придётся слегка обобщить сказанное в n° 3.1. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$, а в нём — симметрические и кососимметрические ряды (первые образуют подкольцо, вторые — модуль над этим подкольцом). То же рассуждение, что и в n° 3.1.2 показывает, что всякий кососимметричный ряд A однозначно записывается в виде бесконечной целочисленной линейной комбинации альтернированных S_n-орбит мономов

$$A = \sum_{\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n} c_\nu \cdot \Delta_\nu \tag{3-26}$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ из n строк строго убывающей длины, коэффициенты $c_\nu \in \mathbb{Z}$, и

$$\Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n} .$$

Лемма 3.1

Разложение (3-26) для произведения базисного кососимметрического многочлена Δ_ν на симметрический ряд

$$H(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i + x_i^2 + x_i^3 + \cdots \right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x)$$

имеет вид $\Delta_\nu \cdot \ = \sum\limits_{\eta} \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ с

$$\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n .$$

Доказательство. Для любых n рядов $f_1(t),\ f_2(t),\ \dots\ ,\ f_n(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ положим

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) f_1\left(x_{g(1)}\right) f_2\left(x_{g(2)}\right) \cdots f_n\left(x_{g(n)}\right) .$$

Ряд $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \in \mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ кососимметричен и полилинейно и кососимметрично зависит от $f_1, f_2, \dots, f_n$. В частности, $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ не изменяется при добавлении к любому из рядов любой линейной комбинации остальных.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что $t^{\nu_1} \wedge t^{\nu_2} \wedge \dots \wedge t^{\nu_n} = \Delta_\nu$.

В этих обозначениях

$$\Delta_\nu \cdot H = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \prod_{i=1}^{n} x_{g(i)}^{\nu_i} \left(1 - x_{g(i)}\right)^{-1} = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n ,$$

где $f_i(t) = t^{\nu_i}/(1-t) = t^{\nu_i} + t^{\nu_i+1} + t^{\nu_i+2} + \cdots$. Вычитая f_1 из всех остальных рядов, мы обрезаем их до многочленов степени $< \nu_1$. Вычитая второй из тих многочленов из всех последующих, мы обрезаем последние до многочленов степени $< \nu_2$. Действуя в таком духе, приходим к равенству $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n = \overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{f}_n$, в котором $\overline{f}_1 = f_1 = \sum_{j \geqslant \nu_1} t^j$ и $\overline{f}_i = t^{\nu_i} + t^{\nu_i+1} + \cdots + t^{\nu_{i-1}-1}$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. В силу полилинейности $\wedge$-произведения $\overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{f}_n = \sum_\eta t^{\eta_1} \wedge t^{\eta_2} \wedge \dots \wedge t^{\eta_n} = \sum_\eta \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем $\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \eta_3 \geqslant \nu_3 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n$. □

Следствие 3.6 (формула Пьери)

$$s_\lambda \cdot h_k = \sum_\mu s_\mu ,$$

где суммирование происходит по всем диаграммам μ из $\leqslant n$ строк, которые можно получить, добавляя к диаграмме λ ровно k клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Доказательство. По лем. 3.1 имеем равенство $\Delta_{\delta+\lambda} \sum_{k \geqslant 0} h_k = \sum_\tau \Delta_{\delta+\mu}$, где суммирование происходит по всем диаграммам μ, таким что[1] $\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$. Деля обе части на Δ_δ и беря в полученном равенстве однородную компоненту степени $|\lambda| + k$ по x, получаем требуемую формулу. □

Замечание 3.1. Если диаграмма λ состоит из $k < n$ строк, что отвечает значениям $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_n = 0$, диаграммы μ в формуле Пьери могут содержать на одну строку больше, чем в диаграмме λ . Например, при $n = 2$ получаем

$$s_{(2)} \cdot h_1 = s_{(2,1)} + s_{(3)} ,$$

что вновь приводит нас к выражению $s_{(2,1)} = h_2 h_1 - h_3$ из n° 3.5.1 на стр. 40.

[1] напомним (см. n° 3.1.2), что $\lambda_i = \nu_i - n + i$, $\mu_i = \eta_i - n + i$, поэтому неравенства $\eta_i \geqslant \nu_i > \eta_{i+1}$ равносильны неравенствам $\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant \mu_{i+1}$

3.7. Кольцо симметрических функций. Удобно думать про симметрические многочлены не привязываясь к конкретному числу переменных, но считая, что их достаточно много для того, чтобы все участвующие в рассуждении функции были определены. Формализуется это так. Условимся не различать между собою две диаграммы λ', λ'', а также два набора показателей m', m'', если они получаются друг из друга дописыванием справа любого числа нулей. Для каждого набора занумерованных натуральными числами букв q_i, $i \in \mathbb{N}$, положим

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} q_{\lambda_3} \cdots \quad \text{и} \quad q^m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_1^{m_3} \cdots .$$

Запись $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$ всегда будет означать, что λ содержит m_i строк длины i для всех $i \in \mathbb{N}$. Это происходит тогда и только тогда, когда $q_\lambda = q^m$. Наконец, положим $m_\lambda = s_\lambda = 0$ всякий раз, когда число переменных меньше количества строк в диаграмме λ, и $e_\lambda = 0$, когда число переменных меньше количества столбцов в диаграмме λ. При таких соглашениях каждый из симметрических многочленов $m_\lambda(x)$, $s_\lambda(x)$, $e_\lambda(x)$, $h_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ становится определён для переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ любой размерности r, причём при $r > s$ подстановка

$$x_{s+1} = x_{s+2} = \cdots = x_r = 0 \tag{3-27}$$

превращает каждый из этих многочленов в одноимённый многочлен от меньшего набора переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$. Подстановка (3-27) задаёт сюрьективный гомоморфизм колец

$$\zeta_{sr} : \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_r] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_s] . \tag{3-28}$$

Будем называть последовательность симметрических многочленов

$$f^{(n)} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

(по одному многочлену для каждого числа переменных $n \in \mathbb{N}$) *симметрической функцией степени d* и обозначать такую функцию просто через f, если выполняются два условия:

- при всех n многочлен $f^{(n)}$ однороден степени d
- $\zeta_{rs}\left(f^{(r)}\right) = f^{(s)}$ при любых $r > s$

При этом запись $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по определению означает $f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, но поскольку верхний индекс у f равен числу подставляемых переменных, писать его нет смысла. Например, для фиксированной диаграммы λ веса $|\lambda| = d$ последовательность мономиальных многочленов $m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, образует симметрическую функцию степени d, которая обозначается m_λ. Скажем, кубическая симметрическая функция $m_{(2,1)}$ на наборах из одной, двух и трёх переменных имеет вид

$$\begin{aligned} m_{(2,1)}(x_1) &= 0 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 . \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются и симметрические функции s_λ, e_λ, h_λ и p_λ степени $|\lambda|$.

Симметрические функции степени d образуют $\mathbb{Z}$-модуль. Его принято обозначать Λ_d. Из сказанного в предыдущих разделах вытекает, что симметрические функции m_λ, s_λ, e_λ и h_λ, занумерованные всевозможными диаграммами Юнга веса $|\lambda| = d$, являются базисами в Λ_d, а симметрические функции p_λ составляют базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda_d$ симметрических функций с рациональными коэффициентами. Таким образом, Λ_d является свободным модулем *конечного* ранга, равного количеству диаграмм Юнга веса d. Это количество принято обозначать $p(d)$ и называть *числом разбиений* натурального числа d.

Поскольку произведение симметрических функций степеней d_1 и d_2 является симметрической функцией степени $d_1 d_2$, прямая сумма

$$\Lambda = \bigoplus_{d \geqslant 0} \Lambda_d$$

представляет собою градуированное кольцо. Оно называется *кольцом симметрических функций*. Все доказанные выше соотношения между функциями m_λ, s_λ, e_λ, h_λ и рекурсивные выражения p_i через e_j и h_j являются тождествами в кольце Λ, а выражения h_i и e_i через p_λ — тождествами в кольце $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами.

§4. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

4.1. Массивы и элементарные операции над ними. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества из n и m элементов:

$$I = \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}\ , \quad J = \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ m\} \tag{4-1}$$

и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Такую таблицу a мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из I росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из J росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i,j)$ клетки с координатами (i,j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделенных двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем вычислять с числами $a(i,j)$, но будем перекладывать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп.

С массивом a связан *столбцовый вес* (или *I-вес*)

$$w^I = \Big(\sum_j a(1,j),\ \sum_j a(2,j),\ \dots\ ,\ \sum_j a(n,j)\Big) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\ , \tag{4-2}$$

представляющий собой n-мерный целочисленный вектор, i-тая координата которого равна общему количеству шариков в i-том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или *J-вес*)

$$w^J = \Big(\sum_i a(i,1),\ \sum_i a(i,2),\ \dots\ ,\ \sum_i a(i,m)\Big) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}\ . \tag{4-3}$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \mapsto a^t\ :\ a^t(i,j) = a(j,i)\,. \tag{4-4}$$

На множестве $\mathcal{M}$ всех массивов действуют четыре набора *элементарных операций*

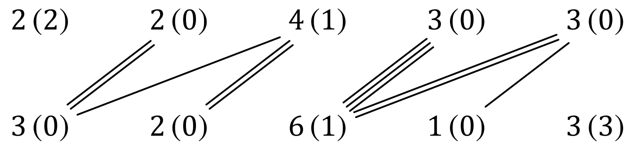
$$D_j\ , \quad U_j\ , \quad L_i\ , \quad R_i\ , \quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

При применении любой из этих операций к данному массиву $a \in \mathcal{M}$ массив a либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

4.1.1. Вертикальные операции $\boldsymbol{D_j}$ и $\boldsymbol{U_j}$ перемещают шар по вертикали в пределах соседних j-той и $(j+1)$-ой строки. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть (или убедиться в том, что такого шара нет), следует вначале установить между j-той и $(j+1)$-ой строкой *устойчивое паросочетание*[1]. Делается это следующим образом.

[1] по-английски: *stable matching*

Будем последовательно перебирать шарики в $(j+1)$-ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j-той строке, либо объявлять *свободными*. Пусть очередной шарик $\boldsymbol{ш}$ лежит в клетке $(i, j+1)$. Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в строке j *строго левее* i-того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар $\boldsymbol{ш}$ объявляется свободным. После того, как все шары $(j+1)$-ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары j-той строки, не являющиеся ни чьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):



(4-5)

По определению, операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$-ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$-ой строчке нет. Операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j-той строки или ничего не делает, если в j-ой строке нет свободных шаров. Так, в примере (4-5) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания ясно, что все свободные шары j-той строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j+1)$-ой строки. Поэтому, когда операция D_j действует на массив a эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром j-той строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Стало быть, операция U_j, применённая к массиву $D_j a$ поднимет этот опущенный шар назад, т. е. $U_j D_j a = a$ всякий раз, когда D_j действует на a эффективно. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$.

Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$ по формуле $a = U_{j_k} \cdots U_{j_1}\big(D_{j_1} \cdots D_{j_k}(a)\big)$ при условии, что каждая буква D_j действует эффективно. Мы будем называть такие D-слова *a-эффективными* (или просто *эффективными*, если понятно, о каком a речь).

4.1.2. Горизонтальные операции $\boldsymbol{L_i}$ и $\boldsymbol{R_i}$ определяются симметричным образом: они действуют в i-м и $(i+1)$-м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е. $L_i(a) = \big(D_i(a^t)\big)^t$ и $R_i(a) = \big(U_i(a^t)\big)^t$.

Упражнение 4.1. Переговорите это определение явно: скажите, как установить устойчивое паросочетание между i-тым и $(i+1)$-м столбцом, и какой шар будут перемещать R_i и L_i .

Отметим, что операции D, L сохраняют столбцовый вес, а операции R, L — строчный.

Лемма 4.1 (лемма о коммутировании)
Каждая из горизонтальных операций L_i, R_i перестановочна с каждой из вертикальных операций D_j, U_j.

Доказательство. Мы покажем, что D_j и U_j перестановочны с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара *ш* на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что эта процедура не изменяет устойчивого паросочетания между $(j+1)$-ой и j-той строкой в том смысле, что после применения L_i связанными в пары будут в точности те же самые шары, что и до применения. Это очевидно, когда *ш* лежит вне $(j+1)$-ой и j-той строк. Остаются два случая, представленные на рис. 4◇1.

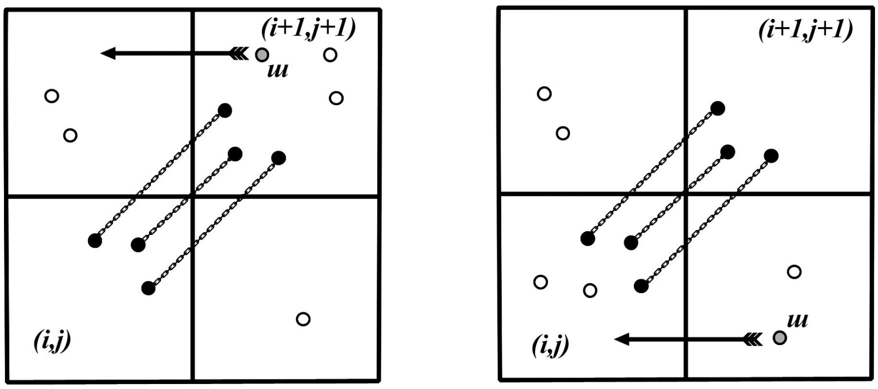


Рис. 4◇1. Действие L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть *ш* лежит в $(j+1)$-ой строчке, т. е. в клетке $(i+1, j+1)$, как на левой картинке с рис. 4◇1. Тогда все шары из клетки (i, j) имеют партнёров в клетке $(i+1, j+1)$, иначе шар *ш* получил бы себе партнёра в клетке (i, j) в паросочетании между i-тым и $(i+1)$-м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара *ш* был партнёр, то он был строго левее клетки (i, j), а значит и останется партнёром после перемещения *ш* на клетку влево. А если партнёра у *ш* не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении *ш* строчное паросочетание не изменяется.

Пусть *ш* лежит в j-той строчке, как на правой картинке с рис. 4◇1. Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i+1, j+1)$ имеют партнёров в клетке (i, j). Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i+1, j+1)$-той клетки получат партнёров в клетке (i, j). Поэтому перемещение шара *ш* на клетку влево и в этом случае не изменит ни его статуса, ни партнёра (если таковой был). □

Следствие 4.1
Слово , составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a, когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a вертикальными операциями. Аналогично, слово V, составленное из вертикальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a, когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе устанавливается аналогично. Достаточно проверить, что для любых i, j операция L_i эффективно действует на a тогда и только тогда, когда она эффективно действует на $D_j a$, и только тогда, когда она эффективно действует на $U_j a$. Если $L_i a = a$, то $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, и

$L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i-тая компонента столбцового веса $w^I(L_i a)$ будет строго больше i-той компоненты $w^I(a)$, а так как D_j и U_j не меняют столбцовый вес, то $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$. □

4.2. Уплотнение массивов. Будем называть массив D-, L-, R- или U-*плотным* (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Применение к произвольному массиву достаточно большого числа операций одного из типов приводит к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. На рис. 4◇2 показаны два пути уплотнения случайно взятого массива 3×2.

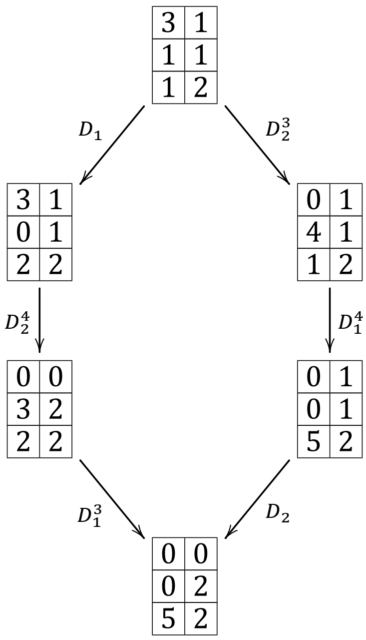


Рис. 4◇2. Два пути уплотнения вниз

Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 4.1, но прежде сделаем одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

4.2.1. Биплотные массивы и диаграммы Юнга. Из сл. 4.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в какомнибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. Поскольку далее мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, условимся называть просто *биплотными* массивы, плотные одновременно *вниз* и *влево*. Все шары в биплотном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали $i = j$, причём их количества нестрого убывают с ростом i. Поэтому столбцовый вес биплотного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга $\lambda = w^I(b) = w^J(b)$, т. е. биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга[1]. Диаграмма Юнга, отвечающая биплотному массиву, который получается DU-уплотнением данного массива a, называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Докажем теперь, что это понятие корректно.

Предложение 4.1
Результат D- , L- , R- или U- уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга $w^I(a)$. Поскольку $w^I(a)$ не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь a произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово $L = L_{i_1}L_{i_2} \dots L_{i_k}$, эффективно уплотняющее a влево до L-плотного массива $a' = La$. Тогда для любого слова $D = D_{j_1}D_{j_2} \dots D_{j_k}$, такого что Da плотен вниз, действие L на Da тоже будет эффективным, а массив $LDa = DLa$ будет биплотен (поскольку применение L сохраняет свойство массива Da быть плотным вниз, а применение D сохраняет свойство массива La быть плотным влево). Таким образом, мы можем записать Da как $L^{-1}DLa$. Так как массив DLa, по уже доказанному, не зависит от выбора уплотняющего слова D (ибо DLa есть D-уплотнение L-плотного массива La), массив $Da = L^{-1}DLa$ тоже не зависит от выбора D . □

4.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга. Из любого массива высоты m и ширины n можно изготовить m слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом $\{1, 2, \dots, n\}$. Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем. Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдём по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся нам буквы. В результате j-тая строка массива развернётся в слово

$$\underbrace{11\dots1}_{a(1,j)}\,\underbrace{22\dots2}_{a(2,j)}\,\dots\,\dots\,\dots\,\underbrace{nn\dots n}_{a(n,j)}\ .$$

Получающиеся m слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*[2], выровняв их по левому краю. Например:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&1&0\\\hline 0&4&0&0&0\\\hline 3&1&0&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{lllll} \boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{2}&\boxed{5}\\ \boxed{2}&\boxed{2}&\boxed{2}&\boxed{2}&\\ \boxed{3}&\boxed{4}&&&\\ \boxed{5}&&&& \end{array},\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&0&3&0&1\\\hline 0&2&1&1&0\\\hline 0&1&0&2&3\\\hline 1&1&2&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{llllll} \boxed{1}&\boxed{1}&\boxed{3}&\boxed{3}&\boxed{3}&\boxed{5}\\ \boxed{2}&\boxed{2}&\boxed{3}&\boxed{4}&&\\ \boxed{2}&\boxed{4}&\boxed{4}&\boxed{5}&\boxed{5}&\boxed{5}\\ \boxed{1}&\boxed{2}&\boxed{3}&\boxed{3}&\boxed{5}& \end{array}.$$

Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают. Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой

[1] здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей; например, мы считаем равными диаграммы $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 0, 0, 0)$

[2] таким образом из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

буквой «i» в j-том слове (т. е. под шариком, пришедшим из клетки $a(i, j)$) стоит строго большая, чем «i», буква $(j + 1)$-го слова (партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между j-той и $(j + 1)$-ой строками массива). Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы $\{1, 2, \dots, n\}$ заполняют эту диаграмму нестрого возрастая по строкам и *строго* возрастая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы λ называются *таблицами Юнга* формы λ на алфавите $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Мы доказали следующий комбинаторный факт:

Лемма 4.2
Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными вниз массивами размера $m \times n$ и таблицами Юнга из $\leqslant m$ строк на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$. □

4.2.3. Плотные массивы и тексты Ямանучи. L-плотность массива a можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива a^t и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы биективно соответствуют таблицам Юнга из $\leqslant n$ строк в алфавите J. Полезно, однако, охарактеризовать L-плотность и в терминах строчной развёртки. Для этого будем читать слова *строчной* развёртки L-плотного массива *a справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек, двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв «i» и «$(i + 1)$» из I. В комбинаторике такой текст называют *текстом Яманучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 2 & 3 & 3 & \\ 1 & 2 & & \end{array}$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

Лемма 4.3
Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными влево массивами размера $m \times n$ и текстами Яманучи из $\leqslant m$ слов на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$. □

4.2.4. Послойное произведение. Дизъюнктное объединение прямых произведений слоёв отображений множеств $\varphi : X \to Z$ и $\psi : Y \to Z$ над всеми точками $z \in Z$ обозначается

$$X \underset{Z}{\times} Y \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств X и Y над Z. Послойные проекции $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \underset{Z}{\times} Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd} \tag{4-6}$$

которая называется *декартовым квадратом*. Она универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

имеется единственное отображение $\alpha : M \to X \underset{Z}{\times} Y$, такое что $\xi = \pi_X \circ \alpha$ и $\eta = \pi_Y \circ \alpha$.

Упражнение 4.2. Убедитесь в этом и покажите, что универсальное свойство определяет верхний угол квадрата (4-6) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата.

Теорема 4.1
Множество всех массивов $\mathcal{M}$ является послойным произведением множеств плотных влево массивов $\mathcal{L}$ и плотных вниз массивов $\mathcal{D}$ над множеством биплотных массивов $\mathcal{B}$, т. е. коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dl, "L"'] \arrow[dr, "D"] & \\ \mathcal{L} \arrow[dr, "D"'] & & \mathcal{D} \arrow[dl, "L"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

в котором стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз, является декартовым.

Доказательство. По предл. 4.1 стрелки L и D корректно определены и перестановочны друг с другом. Мы должны показать, что отображение $\mathcal{M} \to \mathcal{L} \underset{\mathcal{B}}{\times} \mathcal{D}$, сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathcal{B}$ взаимно однозначно. Сначала установим его инъективность. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$, и пусть слово Λ эффективно уплотняет массив $Da = Da'$ влево. Тогда Λ эффективно действует на a и a' так, что $\Lambda a = La = La' = \Lambda a'$, откуда $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$. Теперь докажем сюрьективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d), в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ, эффективно уплотняющее a_d влево до La_d. Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на $La_d = Da_\ell$, а значит, и на a_ℓ. Массив $a = \Lambda^{-1}a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$ и $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. □

Пример 4.1 (графики отображений и стандартные таблицы)
График отображения множеств $a : I \to J$ — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По теор. 4.1 такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, причём оба этих

массива имеют одинаковую форму $Da_\ell = La_d$, и $w^I(a_d) = (1, 1, \dots, 1)$. По n° 4.2.2 каждая такая пара однозначно описывается следующим набором данных:

- форма $\Phi(a)$ массива a, представляющая собою диаграмму Юнга $\lambda = DLa = LDa$ веса $|\lambda| = n$
- строчная развёртка D-уплотнения a_d массива a, представляющая собою таблицу Юнга формы λ на алфавите I, в которой каждая буква используется ровно один раз.
- столбцовая развёртка L-уплотнения[1] a_ℓ массива a, представляющая собою таблицу Юнга формы λ на алфавите J

Число всех таблиц Юнга формы λ на m-буквенном алфавите принято обозначать через $d_\lambda(m)$. Таблицы формы λ заполненные без повторений числами от 1 до $|\lambda|$ называются *стандартными таблицами* формы λ, и их число обозначается просто через d_λ. Так как всего имеется m^n отображений $I \to J$, мы получаем соотношение

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n\,, \tag{4-7}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга и числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк.

В ситуации, когда $\#J = \#I = n$ и рассматриваются только взаимно однозначные отображения $I \simeq J$, предыдущая конструкция устанавливает биекцию между $n!$ элементами симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса n, откуда

$$\sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{4-8}$$

где сумма идёт о всем n-клеточным диаграммам. Эта биекция индуцирует взаимно однозначное соответствие между инволютивными перестановки[2] $\sigma \in S_n$ в самосопряжёнными массивами $a = a^t$, которым в по теор. 4.1 отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_\lambda d_\lambda = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}\,. \tag{4-9}$$

4.3. Действие симметрической группы на DU-множествах. Будем называть *DU-множеством* всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U. Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U. DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, будем называть *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U-словами. Мы будем называть a_d *нижним концом* орбиты O.

[1] т. е. строчная развёртка транспонированного массива a_ℓ^t

[2] т. е. такие, что $\sigma^2 = 1$

Лемма 4.4
Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. Всякое DU-множество является дизъюнктным объединением DU-орбит.

Доказательство. Не вполне очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \smallsetminus A''$. Если $D_j a' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_j D_j a'$ тоже лежит в A''. □

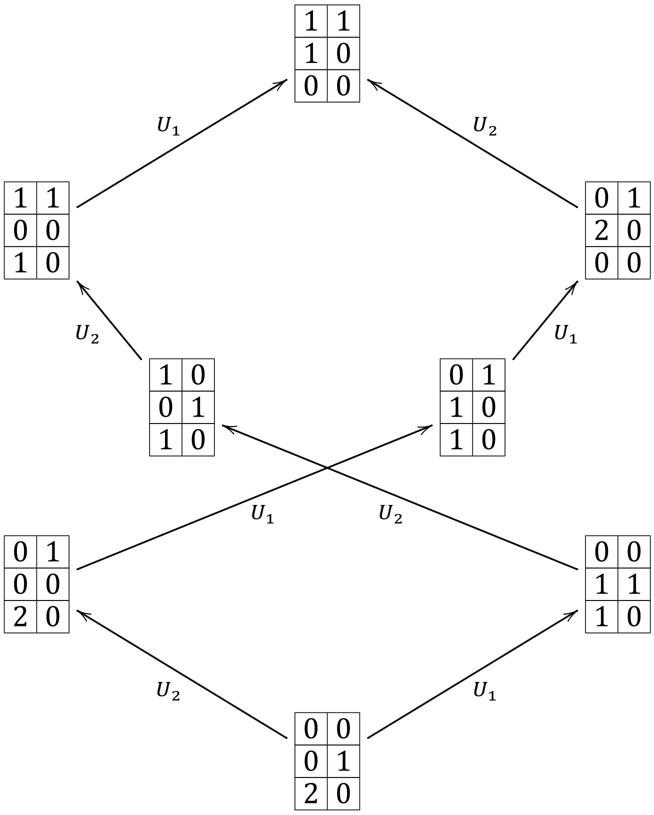
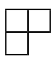


Рис. 4◇3. Стандартная DU-орбита $O_{(2,1)}$.

4.3.1. Стандартные орбиты. DU-орбиты O_λ биплотных массивов λ называются *стандартными*. Например, при $m = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диаграмме – таблице – массиву



$$ - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 4◇3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_λ, нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O. Мы будем называть λ *типом* орбиты O . Количество орбит типа λ в данном DU-множестве M равно количеству плотных вниз массивов строчного веса λ, имеющихся в M .

4.3.2. Действие симметрической группы $S_m = Aut(J)$. На каждом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу S_m, переставляющую строки массива. Оно определяется следующим образом.

Пусть в j-той и $(j + 1)$-ой строках после установления между ними устойчивого паросочетания образовалось, соответственно, s_j и s_{j+1} свободных шаров. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}} \,. \tag{4-10}$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n-того столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1}-s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку (или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$). В частности, действие σ_j на строчный вес w^J состоит в перестановке j-той и $(j + 1)$-ой координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \mathrm{Id}$, а также, что σ_j *коммутирует с циклическими перестановками столбцов*. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R, L и со всеми σ_k с $|k - j| \geqslant 2$. Чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу S_m достаточно проверить *соотношение треугольника* $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$. При этом можно считать массив трёхстрочным. Левое уплотнение L и циклическая перестановка столбцов C превращает любой трёхстрочный массив в одностолбцовый:

$$\begin{array}{|c|}\hline * \; * \; * \\ \hline * \; * \; * \\ \hline * \; * \; * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|}\hline b & c & a \\ \hline e & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline g & h & 0 \\ \hline k & 0 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|}\hline h & g \\ \hline 0 & k \\ \hline 0 & f \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|}\hline \ell & 0 \\ \hline k & 0 \\ \hline f & 0 \\ \hline\end{array}$$

на который σ_j и σ_{j+1} действуют перестановками строк, и соотношение треугольника, таким образом, выполняется.

4.4. Полиномы Шура. Интерпретируем все шарики из j-той строки как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном $x^a \overset{\text{def}}{=} x_1^{w_1^J(a)} x_2^{w_2^J(a)} \cdots x_m^{w_m^J(a)}$, получающийся перемножением всех его шариков. Сумма этих мономов по всем массивам данного DU-множества M обозначается

$$s_M(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{a \in M} x^a \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$$

и называется *многочленом Шура* DU-множества M. Симметрическая группа S_m переставляет координаты весового вектора и действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ, произвольный полином

Шура является линейной комбинацией с неотрицательными целыми коэффициентами *стандартных* многочленов Шура $s_\lambda(x)$, отвечающих биплотным массивам (диаграммам Юнга) λ:

$$s_M(x) = \sum_{\lambda\in\Phi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x)\,, \tag{4-11}$$

где суммирование происходит по всем формам λ массивов из M, и коэффициент c_M^λ равен числу DU-орбит, изоморфных O_λ, т. е. количеству всех плотных вниз массивов J-веса λ в M. Согласно n° 4.2.2, элементы стандартной орбиты O_λ суть всевозможные L-плотные массивы формы λ, и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x^\eta = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \,\cdots\, x_m^{\eta_m}\,, \tag{4-12}$$

где $\eta \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ пробегает m-мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda,\eta}$ равен числу таблиц формы λ, заполненных η_1 единицами, η_2 двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет *состав* η.

Например, при $m = 3$ из представленной на рис. 4◇3 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2\,x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\,.$$

Число $K_{\lambda,\eta}$ таблиц формы λ и состава η называется *числом Костки*. Отметим, что $K_{\lambda,(1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ равно числу стандартных таблиц формы λ, все $K_{\lambda,\lambda} = 1$, и $K_{\lambda,\eta} \neq 0$ только когда при каждом $j = 1, 2, 3, \dots$ выполняются неравенства

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \,\cdots\, + \lambda_j \geqslant \eta_1 + \eta_2 + \,\cdots\, + \eta_j \quad \forall j\,. \tag{4-13}$$

В этой ситуации говорят, что диаграмма λ *доминирует* вектор η и пишут $\lambda \trianglerighteq \eta$.

Упражнение 4.3. Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм Юнга заданного веса n частичный порядок, полный при $n \leqslant 5$, и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Из формулы (4-12) вытекает, что стандартные многочлены Шура $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более, чем m строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены m_μ при помощи нижней унитреугольной матрицы

$$s_\lambda = \sum_{\mu\trianglelefteq\lambda} K_{\lambda,\mu} \cdot m_\mu\,. \tag{4-14}$$

Поскольку такая матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены s_λ тоже образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Пример 4.2 (полные и элементарные симметрические многочлены)

Многочлен Шура $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива, т. е. диаграммы-строки

$$\lambda = (k,\ 0,\ \cdots\ ,\ 0) = \underbrace{\square\square\cdots\square\square}_{k}\,,$$

представляет собой *полный симметрический многочлен* $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$, поскольку для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна однострочная таблица, в которой все координаты выстроены монотонно[1]. Симметричным образом, $s_{(1^k)}$, отвечающий DU-орбите диаграммы-столбца

$$1^k = (1, 1, \cdots, 1) = \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \vdots\\ \square\end{array}\right\} k$$

это *элементарный симметрический многочлен* $e_k(x)$, т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$. Причина та же, только теперь номера переменных в таблице-столбце должны строго возрастать.

Пример 4.3 (тождества Коши и Шура.)
Проинтерпретируем каждый шарик в клетке (i, j) массива a как билинейный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x^I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = y^J = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a, мы получим (в обозначениях n° 4.4) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции из теор. 4.1 сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще всем массивам a формата $I \times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ.

С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t} y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении бесконечных геометрических прогрессий

$$\prod_{\substack{i \in I\\ j \in J}} \left(1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \cdots \right)$$

(выбирая из (i, j)-того сомножителя слагаемое $(x_i y_j)^{a(i,j)}$ мы получаем в точности моном $x^{a^t} y^a$, отвечающий массиву a). Таким образом, мы приходим к *тождеству Коши*:

$$\sum_\lambda s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \tag{4-15}$$

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$ и извлечь из каждого a-монома корень

$$\xi^a = \sqrt{\xi^{a^t} \xi^a} = \sqrt{x^{a^t} y^a}\,|_{x=y=\xi}\,,$$

то, суммируя по всем симметричным массивам a заданной формы λ, мы получим $s_\lambda(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum\limits_\lambda s_\lambda(\xi)$. Тот же результат получится при раскрытии скобок в произведении прогрессий

$$\prod_k \left(1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \cdots \right) \cdot \prod_{i<j} \left(1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \cdots \right) .$$

[1] эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по m ящикам

Мы получаем *тождество Шура*:

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(\xi) = \prod_i \frac{1}{1-\xi_i} \cdot \prod_{i<j} \frac{1}{1-\xi_i\xi_j} \,. \tag{4-16}$$

4.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона. Произведение полиномов Шура $s_M(x) \cdot s_N(x)$ DU-множеств M и N является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n)\times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$ справа к какому-нибудь массиву[1] $a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить через $M \otimes N$ и называть *тензорным произведением* DU-множеств M и N. Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \Big(\sum_{a\in M} x^a\Big) \cdot \Big(\sum_{b\in N} x^b\Big) = \sum_{\substack{a\in M\\ b\in N}} x^{ab} = \sum_{c\in M\otimes N} x^c \,.$$

Разложение произведения $s_\lambda s_\mu$ стандартных полиномов Шура по базису s_ν даёт

Теорема 4.2 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum\limits_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu$, где суммирование происходит по всем диаграммам ν, получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ, а коэффициент $c^\nu_{\lambda\mu}$ равен количеству таких заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \smallsetminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно текст, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (т. е. является тестом Яманучи[2]).

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_\lambda \otimes O_\mu$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_ν. Пусть массив ab лежит в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биплотных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I-веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на[3] b , либо в её действии отдельно на[4] a. Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a', b' по прежнему плотны влево и имеют I-веса λ, μ. Таким образом, a' биплотен формы λ. Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν, то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю

[1] при этом вертикальный J-алфавит не меняется, а горизонтальный I-алфавит заменяется дизъюнктным объединением I-алфавитов массивов a и b

[2] см. n° 4.2.3 на стр. 49

[3] если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b, то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b

[4] если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab

строки «косой таблицы» $\nu \smallsetminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab, а второе, «текстовое», ограничение выражает, согласно n° 4.2.3, плотность влево массива b'. □

Упражнение 4.4. Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона вычислите в Λ_3 произведения $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s_{2,1}^2$. В частности, убедитесь непосредственно, что в первом случае «честное» и «халявное» вычисления[1] дают одинаковые ответы.

Упражнение 4.5 (формулы Пьери). Выведите из правила Литтлвуда-Ричардсона *формулы Пьери* для умножения полиномов Шура на элементарные и полные симметрические многочлены:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_\mu s_\mu \tag{4-17}$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_\nu s_\nu \tag{4-18}$$

где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить приписыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν.

4.5.1. Тождество Якоби – Труди. Из формулы Пьери (4-18) и формулы Пьери из сл. 3.6 на стр. 41 вытекает, что детерминантные полиномы Шура $\Delta_{\delta+\lambda} / \Delta_\delta$ из предыдущего параграфа и комбинаторные полиномы Шура s_λ стандартных DU-орбит — это одни и те же полиномы. В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены h_k. Например, согласно (4-18)

$$\begin{aligned}
s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)}h_1 - s_{(3,2)} \\
s_{(3,2)} &= s_{(3)}h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3h_2 - h_5 - s_{(4,1)} \\
s_{(2,2)} &= s_{(2)}h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)} \\
s_{(4,1)} &= s_{(4)}h_1 - s_{(5)} = h_4h_1 - h_5 \\
s_{(3,1)} &= s_{(3)}h_1 - s_{(4)} = h_3h_1 - h_4
\end{aligned}$$

откуда[2] $s_{(2,2,1)} = -h_3h_2 + h_4h_1 + h_1(h_2^2 - h_1h_3)$. В общем случае, оставляя в правой части формулы (4-18) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через h_k (где k равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки.

Совпадение детерминантного и комбинаторного описания полиномов Шура называется *тождеством Якоби – Труди*.

[1] т. е. применяющее правило теор. 4.2 не к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$, а к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$, что не всё равно

[2] читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (3-25)

4.5.2. Выражение e_λ и h_λ через s_λ. Напомним, что для диаграммы Юнга μ мы обозначаем через m_i количество строк длины i в этой диаграмме и полагаем

$$e_\mu = e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots e_{\mu_r} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n} \tag{4-19}$$

$$h_\mu = h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_r} = h_1^{m_1} h_2^{m_2} \cdots h_n^{m_n} . \tag{4-20}$$

Многочлены (4-19) и (4-20) называются, соответственно, *элементарными* и *полными* симметрическими многочленами. Отметим, что при $k \in \mathbb{N}$

$$e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{и} \quad h_k(x) = s_{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m) .$$

Произвольный многочлен $h_\eta = s_{(\eta_1)} s_{(\eta_2)} \cdots s_{(\eta_r)}$ представляет собою полином Шура DU-множества $O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}$. Орбиты формы ν в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы ν и содержания η. Тем самым,

$$h_\eta = \sum_\nu K_{\nu,\eta} \cdot s_\nu . \tag{4-21}$$

Произвольный многочлен $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} s_{(1^{\eta_2})} \cdots s_{(1^{\eta_r})}$ представляет собою многочлен Шура DU-множества $O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{(1^{\eta_2})} \otimes \cdots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$, каждый массив в котором имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1 a_2 \dots a_r$ ширины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j-номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i. При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив $a'_1 a'_2 \dots a'_r$ в котором шары каждого подмассива a'_i располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив a'_i внесёт не более одного шара в каждую компоненту J-веса. Если суммарный J-вес при этом получится ν, то записывая в каждую строку диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a'_i, которые дают вклад в эту компоненту J-веса, мы получим таблицу содержания η и формы ν^t, *сопряжённой*[1] к форме ν: в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν, а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum_\nu K_{\nu^t,\eta} \cdot s_\nu . \tag{4-22}$$

Следствие 4.2

Инволюция ω из предл. 3.3, переводящая e_k и h_k друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$, т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграмм Юнга.

Доказательство. Так как многочлены s_λ образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций, отображение $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$ однозначно задаёт на модуле симметрических функций $\mathbb{Z}$-линейную инволюцию. Из формул (4-21) и (4-22) следует, что эта инволюция переводит e_k в h_k и наоборот, т. е. совпадает с ω . □

[1] или *транспонированной*, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали

Следствие 4.3 (вторая формула Джамбелли)

$$s_{\lambda^t} = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \ddots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \ddots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{4-23}$$

(по главной диагонали стоят $e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у e с каждым шагом увеличиваются на единицу). □

Доказательство. Применяем инволюцию ω к формуле Джамбелли (3-25) . □

4.6. Скалярное произведение Введём на $\mathbb{Z}$-модуле симметрических функций Λ скалярное произведение $\langle\, *\,,\, *\,\rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным. Из формул (4-21) и (4-14)

$$h_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu\,, \quad s_\mu = \sum_{\lambda \trianglerighteq \mu} K_{\mu,\lambda} \cdot m_\lambda$$

вытекает, что $\big\langle\, h_\lambda\,,\, s_\mu \,\big\rangle = K_{\mu,\lambda} = \big\langle\, m^*_\lambda\,,\, s_\mu \,\big\rangle$, где m^*_λ — базис, двойственный к m_λ. Таким образом, $m^*_\lambda = h_\lambda$, т. е. базисы h_λ и m_λ двойственны друг другу:

$$\big\langle\, h_\lambda\,,\, m_\mu \,\big\rangle = \delta_{\lambda\mu}\,. \tag{4-24}$$

Из сл. 4.2 вытекает, что инволюция ω является ортогональным оператором.

Предложение 4.2

Многочлены Ньютона p_λ составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты $\langle\, p_\lambda\,,\, p_\lambda \,\rangle = z_\lambda$, где[1] $z_\lambda = \prod\limits_k \big(m_k! \cdot k^{m_k}\big)$.

Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (4-15) через функции Ньютона от наборов переменных x и y :

$$\begin{aligned} \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int_0^{y_j} P(t)\, dt \right) = \\ &= \exp\left(\sum_j \sum_k \frac{1}{k}\, p_k(x) y_j^k \right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x) p_k(y)}{k} \right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x) p_k(y)}{k} \right) = \\ &= \prod_k \sum_{\ell \geqslant 0} \frac{1}{\ell! \cdot k^\ell}\, \big(p_k(x) p_k(y)\big)^\ell = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}\, p_\lambda(x) p_\lambda(y) \end{aligned}$$

[1] ср. с формулами (3-19) на стр. 37

(переход в последнем равенстве тот же, что и в доказательстве равенства (3-21) на стр. 37). Если обозначить через $C_{\lambda\mu} = \left\langle s_\lambda \,,\, p_\mu \right\rangle$ коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что $p_\mu = \sum\limits_\lambda C_{\lambda\mu} s_\lambda$, то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнивая коэффициенты при $s_\lambda(x)s_\eta(y)$ в левой и правой части, получаем соотношения

$$\sum_\nu C_{\nu\lambda} C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_\lambda & \text{при } \eta = \lambda \\ 0 & \text{при } \eta \neq \lambda \end{cases}$$

т. е. матрица Грама $\left(\left\langle p_\lambda \,,\, p_\mu \right\rangle\right) = C^t \cdot C$ диагональна с диагональными элементами z_λ. $\square$

§5. Знакомство с теорией представлений.

5.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \Bbbk$ векторное пространство с базисом R над полем $\Bbbk$, состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\Bbbk$, а через $A_R \stackrel{\text{def}}{=} T(R \otimes \Bbbk)$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру, порождённую множеством R.

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t, векторное пространство $t \otimes \Bbbk = \Bbbk \cdot t$ одномерно, а ассоциативная алгебра $A_t \simeq \Bbbk[t]$ изоморфна алгебре многочленов от одной переменной[1].

Отображение множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W

$$\varrho : R \to \operatorname{End}(W) \tag{5-1}$$

называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W. В силу универсального свойства свободной алгебры A_R, линейные представления (5-1) биективно соответствуют гомоморфизмам алгебр

$$\tilde{\varrho} : A_R \to \operatorname{End}(W)\,. \tag{5-2}$$

Гомоморфизм (5-2) называется *линейным представлением* алгебры A_R в пространстве W. Пространство W с фиксированным отображением (5-1) или гомоморфзмом (5-2) называется R-модулем или A_R-модулем. И то, и то означает фиксацию для каждого $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \to W$. Тензоры

$$f = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_m \in A_R$$

с $f_\nu \in R$ и $x_{f_1 f_2 \dots f_m} \in \Bbbk$ при этом представляются линейными операторами

$$\tilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \cdots \circ \varrho(f_m) : W \to W\,.$$

Образ гомоморфизма (5-2) состоит из всех операторов $W \to W$, которые можно получить, беря конечные линейные комбинации и композиции операторов, представляющих элементы множества R. Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \operatorname{End}(W)$ и обозначается $\operatorname{Ass}\big(\varrho(R)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{im} \tilde{\varrho}$. Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\tilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через fw. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $FU \stackrel{\text{def}}{=} \{fu \mid f \in F\,,\ u \in U\}\,.$

Определение 5.1 (разложимость и (полу) простота)
Подпространство $U \subset W$ называется *R-подмодулем*[2], если $RU \subset U$. Как обычно, мы называем подмодуль U *собственным*, если он отличен от нуля и от всего W. Модуль называется *неприводимым*[3], если у него нет собственных подмодулей, *разложимым* —

[1] изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes t \otimes \cdots \otimes t \in (\Bbbk \cdot t)^{\otimes n}$ моном t^n
[2] а также *R-инвариантным* подпространством
[3] или *простым*

если он является прямой суммой собственных подмодулей, и *вполне приводимым*[1] — если он является прямой суммой неприводимых подмодулей.

Упражнение 5.1. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость модуля W относительно множества операторов и относительно ассоциативной оболочки этих операторов означают одно и то же.

Пример 5.1 (пространство с одним оператором)
Если множество R состоит из одного элемента t, то $A_R \simeq \Bbbk[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \to \operatorname{End} W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \to W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \operatorname{ev}_f : \Bbbk[t] \to \operatorname{End}(W), \quad t \mapsto f, \tag{5-3}$$

переводящим многочлен $F \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t. Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (5-3) имеет ненулевое ядро $\ker \operatorname{ev}_f = (\mu_f)$, где μ_f — приведённый многочлен наименьшей степени, такой что[2] $\mu_f(f) = 0$. Ассоциативная оболочка оператора f, т. е. образ гомоморфизма (5-3), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\Bbbk[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов конечномерный $\Bbbk[t]$-модуль W, будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_2^{m_2})} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}, \tag{5-4}$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t, и два таких модуля изоморфны , если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. В частности, всякое неразложимое пространство с оператором изоморфно пространству $\Bbbk[t]/(p^m)$ с оператором умножения на t, и два таких пространства с разными p или m не изоморфны друг другу.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что $\Bbbk[t]$-модуль $\Bbbk[t]/(p^m)$ неприводим , если и только если $m = 1$.

Тем самым, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно $\Bbbk[t]/(p)$, где $p \in \Bbbk[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t, а всякое полупростое — прямой сумме нескольких таких пространств.

Упражнение 5.3. Докажите, что оператор f над произвольным полем $\Bbbk$ диагонализуем тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей[3].

[1] а также *полупростым*

[2] напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f

[3] в частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве

Пример 5.2 (коммутирующие операторы)
Если все операторы из R коммутируют друг с другом, то каждое собственное подпространство любого оператора $f \in R$ является R-подмодулем, т. к. любой перестановочный с f оператор g переводит собственный для f вектор v с $fv = \lambda v$ в собственный вектор с тем же собственным числом: $f(gv) = g(fv) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Из этого наблюдения индукцией по $\dim V$ выводится, что над алгебраически замкнутым полем все операторы из R имеют в V общий собственный вектор: это так, если все операторы скалярны, если же хоть один из операторов не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство, которое является R-модулем размерности, меньшей $\dim V$, и по индукции в нём есть вектор, собственный для всех операторов из R.

Аналогично проверяется, что если все операторы из R диагонализуемы, то их можно диагонализовать одновременно в одном общем базисе. Для этого надо разложить V в прямую сумму собственных подпространств какого-нибудь нескалярного оператора $f \in R$. Такое разложение R-инвариантно, и по упр. 5.3 ограничение каждого оператора из R на каждое собственное подпространство f диагонализуемо на этом подпространстве. Используя индукцию по размерности, мы одновременно диагонализуем все операторы из R на каждом прямом слагаемом.

Следствие 5.1
Над алгебраически замкнутым полем все конечномерные простые модули над любым множеством коммутирующих операторов одномерны, и любой конечномерный модуль над множеством диагонализуемых коммутирующих операторов полупрост. □

5.1.1. Гомоморфизмы представлений. Линейный оператор $\varphi : W_1 \to W_2$ между R-модулями, заданными отображениями $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R-модулей[1], если он перестановочен с действием всех операторов из R, т. е. если для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \\ W_1 \arrow[u, "\varrho_1(f)"] \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \arrow[u, "\varrho_2(f)"'] \end{tikzcd} .$$

Множество всех R-линейных гомоморфизмов обозначается через

$$\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : W_1 \to W_2 \mid \forall w \in W_1, \forall f \in R\ \varphi(fw) = f\varphi(w)\}.$$

Упражнение 5.4. Убедитесь, что $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ и что композиции R-линейных отображений R-линейны, а ядро и образ гомоморфизма R-модулей являются R-подмодулями.

Лемма 5.1 (лемма Шура)
Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R-модулей является изоморфизмом. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то все R-линейные эндоморфизмы неприводимого R-модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda \cdot \mathrm{Id}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

[1] а также *сплетающим оператором* или *R-линейным отображением*

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$ неприводимы и $\varphi : W_1 \to W_2$ перестановочен со всеми операторами из R. Поскольку $\ker\varphi \subset W_1$ и $\operatorname{im}\varphi \subset W_2$ являются R-подмодулями, оба они несобственные, и либо $\ker\varphi = W_1$, т. е. $\varphi = 0$, либо $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{im}\varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq 0 \Rightarrow \operatorname{im}\varphi = W_2$, т. е. φ инъективен и сюрьективен. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\varphi : W \to W$ является R-линейным автоморфизмом R-модуля W, то каждый из операторов $\lambda\cdot\mathrm{Id}_W - \varphi$ с $\lambda \in \Bbbk$ тоже R-линеен и при некотором λ имеет ненулевое ядро. Так как W неприводим, оно совпадает со всем W. □

Следствие 5.2
Если основное поле алгебраически замкнуто, а R-модули U и W неприводимы, то

$$\dim \mathrm{Hom}_R(U,W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \simeq W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda\cdot\mathrm{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^*$. □

5.2. Полупростые модули над ассоциативной алгеброй. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$, а V — любое векторное пространство над $\Bbbk$. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varrho : A \to \mathrm{End}\,V$, называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V, и пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Представления ассоциативных алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов и к ним в полной мере приложима терминология из опр. 5.1 на стр. 61. Для двух A-модулей U, W мы полагаем

$$\mathrm{Hom}_A(U,V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid \forall f \in A, \forall u \in U\ \varphi(fu) = f\varphi(u)\}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \to W$ *A-линейными*.

Упражнение 5.5. Пусть на пространстве V задан оператор π, удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$. Покажите, что а) $V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$ и π проектирует V на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$ б) если π является A-линейным гомоморфизмом, то подпространства $\ker\pi$ и $\operatorname{im}\pi$ являются A-подмодулями в) для любого A-линейного проектора π оператор $1-\pi$ является A-линейным проектором на $\ker\pi$.

Предложение 5.1 (критерии полупростоты)
Следующие свойства конечномерного[1] A-модуля W попарно эквивалентны:

1) W полупрост (т. е. является прямой суммой простых A-модулей)

2) W линейно порождается простыми подмодулями

3) $\forall$ A-подмодуля $U \subset W$ $\exists$ A-подмодуль $V \subset W : W = U \oplus V$

4) $\forall$ A-подмодуля $U \subset W$ $\exists\, \pi \in \mathrm{End}_A(W) : \pi^2 = \pi$ и $\operatorname{im}\pi = U$.

[1]требование конечномерности не является здесь существенным, и преодолевается надлежащим применением леммы Цорна

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть W линейно порождается набором простых подмодулей V_α. Тогда для любого подмодуля $U \subsetneq W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули $V_1, V_2, \dots, V_m$, что

$$W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m\,.$$

А именно, возьмём в качестве V_1 произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U (таковой существует, поскольку $U \neq W$ и W линейно порождается простыми подмодулями). Так как подмодуль V_1 прост, пересечение $V_1 \cap U \subsetneq V_1$ нулевое. Поэтому сумма U и V_1 прямая. Если $U \oplus V_1 \neq W$, то повторяем рассуждение с заменой U на $U \oplus V_1$: выбираем неприводимый подмодуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$ и видим, что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая. Через конечное число шагов[1] получающаяся прямая сумма исчерпает всё пространство W. Отметим, что при $U = 0$ это же рассуждение доказывает импликацию (2) $\Rightarrow$ (1).

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) очевидна: проектор π_V модуля $W = U \oplus V$ на U вдоль V перестановочен с действием A. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) доказывается индукцией по $\dim W$. Если $\dim W = 1$ или если W прост, доказывать нечего. Если W обладает собственным подмодулем $U \subsetneq W$, и $\pi : W \twoheadrightarrow U$ соответствующий проектор, то по упр. 5.5 $W = U \oplus V$, где $V = \ker \pi$ тоже является A-подмодулем. Заметим теперь, что если свойство (4) выполняется в модуле W, то оно выполняется и во всех его подмодулях $M \subset W$, поскольку любой подмодуль $N \subset M$ является одновременно подмодулем в W, и ограничение на M A-линейного проектора $W \twoheadrightarrow N$ даёт A-линейный проектор $M \twoheadrightarrow N$. В частности, свойство (4) выполнено в U и в V. Поскольку их размерности строго меньше $\dim W$, по индукции, U и V являются прямыми суммами простых модулей. Поэтому $W = U \oplus V$ тоже является прямой суммой простых подмодулей. $\square$

Следствие 5.3
Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом A-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами его простых подмодулей. По лемме Шура эти образы либо нулевые, либо изоморфны исходным простым подмодулям, т. е. тоже просты. $\square$

Упражнение 5.6. Покажите, что для любого векторного пространства V имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\left(V^{\oplus n}\right) \simeq \mathrm{Mat}_n\left(\mathrm{End}(V)\right)$.

Теорема 5.1 (теорема о двойном централизаторе)
Пусть конечномерное[2] векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$. Обозначим через $B = \mathrm{End}_A(V)$ алгебру всех операторов, пе-

[1] в бесконечномерном случае в этом месте следует применить лемму Цорна
[2] в этой теореме конечномерность уже существенна

рестановочных с подалгеброй[1] A. Тогда алгебра всех операторов, перестановочных с подалгеброй B, совпадает с A, т. е. $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся оператор $a \in A$, такой что $\varphi e_i = ae_i$ при всех i. Отсюда сразу следует равенство $\varphi = a$.

Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = (fv_1, fv_2, \dots, fv_n)$. Обозначим вектор $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$ через e. Нам надо показать, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W является полупростым A-модулем, A-подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $\pi : W \twoheadrightarrow Ae$, тождественно действующего на самом Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Остаётся проверить, что π и в самом деле коммутирует с φ.

Для этого, следуя упр. 5.6, запишем действие эндоморфизма $\pi : V^{\oplus n} \to V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами[2] $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$. Поскольку π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. лежит в $\mathrm{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, коммутирует с π. □

Следствие 5.4 (теорема Бернсайда)
Пусть основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Если конечномерное пространство V неприводимо над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \to \mathrm{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура[3] $\mathrm{End}_{\mathrm{Ass}(R)}(V) = \Bbbk$. По теор. 5.1 $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Ass}(R)$. □

Упражнение 5.7. Покажите, что над любым полем $\Bbbk$ верно и обратное: если $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$, то R-модуль V неприводим.

5.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем простой A-модуль U и для любого A-модуля W зададим на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_A(U,W)\otimes U$ структуру A-модуля правилом $a(\varphi \otimes u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$ для всех $a \in A$. Каноническая свёртка

$$c : \mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U \to W , \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u), \tag{5-5}$$

является A-линейным гомоморфизмом. Её образ называется *U-изотипной компонентой* модуля W и обозначается $W_U \subset W$. Он равен сумме всех изоморфных U неприводимых подмодулей в W: поскольку всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : U \to W$

[1] Подалгебра $\mathrm{End}_A(V)$ называется *централизатором* подалгебры A в алгебре $\mathrm{End}(V)$, чем и объясняется название теоремы. В англоязычной литературе подалгебру $\mathrm{End}_A(V)$ иногда называют «*commutator of A*», а теор. 5.1 — «*double commutator theorem*». В русском языке термин «коммутатор» в этом контексте никогда не используется.

[2] оператор $\pi_{ij} : V \to V$ задаёт проекцию на i-тое слагаемое суммы $V^{\oplus n}$ результата применения π к j-тому слагаемому этой суммы

[3] см. лем. 5.1 на стр. 63

инъективен, любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, изоморфных U, и наоборот, если векторы $v_i \in \mathrm{im}\,\psi_i$ лежат в образах A-линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c\left(\sum \psi_i \otimes \psi_i^{-1} v_i\right)$.

Предложение 5.2
Всякий гомоморфизм A-модулей $\varphi : V \to W$ переводит U-изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U-изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Образ $\varphi(v)$ любого вектора вида $v = \sum \psi_i(u_i)$ с $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ и $u_i \in U$ также имеет вид $\sum \varphi\psi_i(v)$ с $\varphi\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,W)$. □

Предложение 5.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каноническая свёртка (5-5) инъективна, т. е. задаёт изоморфизм $c : \mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U \simeq W_U$.

Доказательство. Поскольку модуль W_U линейно порождается простыми подмодулями, изоморфными U, он раскладывается в прямую сумму таких подмодулей:

$$W_U = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s\,. \tag{5-6}$$

Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$ с образом $\psi_i(U) = V_i$. Тогда $\mathrm{Hom}_A(U,W) = \mathrm{Hom}_A(U,W_U) = \bigoplus \mathrm{Hom}_A(U,V_i)$ является по сл. 5.2 прямой суммой одномерных пространств $\Bbbk \cdot \psi_i$, порождённых вложениями ψ_i. Поэтому элементы модуля $\mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U$ однозначно записываются в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$ с $u_i \in U$. Если

$$c\left(\sum \psi_i \otimes u_i\right) = \sum \psi_i(u_i) = 0\,,$$

то каждый из s векторов $\psi_i(u_i)$, лежащих в разных компонентах прямой суммы (5-6), равен нулю в отдельности, а поскольку все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. □

Предложение 5.4 (изотипное разложение)
Если A-модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U, совпадает с U-изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и имеется каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U\,, \tag{5-7}$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U, для которых $\mathrm{Hom}_A(U,W) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Hom}_A(U,W) = \bigoplus \mathrm{Hom}_A(U,V_i)$ и $\mathrm{Hom}_A(U,V_j) = 0$ для всех $V_j \not\simeq U$, образ канонической свёртки (5-5) лежит в сумме тех подмодулей V_i, что изоморфны U. □

Определение 5.2
Для простого модуля U и полупростого модуля W целое неотрицательное число

$$m_U \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_U \,/\, \dim U\,, \tag{5-8}$$

равное количеству изоморфных модулю U слагаемых любого разложения модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W.

Следствие 5.5
Для всех конечномерных полупростых A-модулей V, W над алгебраически замкнутым полем $\dim \mathrm{Hom}_A(V,W) = \sum_U m_U(U)\cdot m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$, где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U.

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus V_i$ и $W = \bigoplus W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\simeq W_j$ и одномерные при $V_i \simeq W_j$. Поэтому $\mathrm{Hom}_A(V,W) = \bigoplus\limits_{ij} \mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ имеет размерность $\sum\limits_U m_U(U)\cdot m_U(W)$ и то же самое верно для $\dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$. □

5.4. Линейные представления групп. Действие группы G на векторном пространстве V линейными преобразованиями, т. е. гомоморфизм групп $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V. Пространство V называется в этом случае G-модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G-модулей U, W канонически наделяются такими структурами G-модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам $g(u \dotplus w) \stackrel{\text{def}}{=} (gu) \dotplus (gw)$, $g(u \otimes w) \stackrel{\text{def}}{=} (fu) \otimes (gw)$, $g(u_1 \wedge u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (gu_1) \wedge (gu_2)$, $g(u_1 \cdot u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (gu_1)\cdot(gu_2)$ соответственно. Для любого G-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G-модулем с действием $g[v] \stackrel{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 5.8. Убедитесь, что эти правила корректно задают гомоморфизмы группы G в $\mathrm{GL}(U \oplus W)$, $\mathrm{GL}(U\otimes W)$, $\mathrm{GL}\big(\Lambda(U)\big)$, $\mathrm{GL}\big(S(U)\big)$ и $\mathrm{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *двойственное представление*

$$\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$$

определяется так, чтобы свёртка векторов с ковекторами сохранялась под действием группы G, т. е. для всех $g \in G$, $\xi \in V^*$ и $w \in V$ выполняется равенство

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, \varrho(g)w\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle\ . \tag{5-9}$$

Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (5-9) равносильно равенству

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, v\,\rangle = \left\langle\, \xi\,,\, \varrho\left(g^{-1}\right) v\,\right\rangle$$

для всех $v \in W$, откуда $\varrho^*(g) = \varrho\left(g^{-1}\right)^*$ это двойственный к $\varrho(g)^{-1}$ оператор, переводящий ковектор $\xi \in V^*$ в ковектор $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi\left(g^{-1}v\right)$. В частности, матрицы операторов $\varrho(g)$ и $\varrho^*(g)$ в двойственных базисах пространств V и V^* транспонированы и обратны друг другу.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \to \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^* \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \to V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1} . \tag{5-10}$$

Упражнение 5.10. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (5-10) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall g \in G \; g\varphi = \varphi g\}$$

и называется пространством G-*инвариантных* операторов[1].

Лемма 5.2

Пусть $|G| = n$, а основное поле $\Bbbk$ содержит все n корней n-той степени из единицы и $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid n$. Тогда в любом конечномерном представлении группы G над полем $\Bbbk$ все её элементы действуют диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируются многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней и полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители. По упр. 5.3 такой оператор диагонализуем. □

5.4.1. Представления конечных абелевых групп. Пусть G — произвольная конечная абелева группа, основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$. Из лем. 5.2 и сл. 5.1 на стр. 63 следует, что всякое конечномерное линейное представление группы G является прямой суммой одномерных. Так как любой линейный оператор на одномерном пространстве скалярен, одномерное представление описывается мультипликативным гомоморфизмом

$$\chi : G \to \Bbbk^* , \quad gv = \chi(g)v \quad \forall g \in G \, \forall v \in V , \tag{5-11}$$

сопоставляющим каждому элементу группы скаляр, которым этот элемент действует на пространстве представления. Гомоморфизмы (5-11) называются (*мультипликативными*) *характерами* абелевой группы G. Одномерный G-модуль, отвечающий характеру χ, обозначается через V_χ.

Упражнение 5.11. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в $\Bbbk^*$.

Поскольку $\chi^{|G|}(g) = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого характера лежит в мультипликативной подгруппе $\boldsymbol{\mu}_{|G|}(\Bbbk) \subset \Bbbk^*$ корней $|G|$-той степени из 1 в поле $\Bbbk$. Сами характеры образуют мультипликативную абелеву подгруппу в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта группа обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

Упражнение 5.12. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

[1] а также *сплетающих* операторов, G-*линейных* операторов или G-*гомоморфизмов*

Группа G действует на $\Bbbk^G$ по правилу $g : f(x) \mapsto f(gx)$, и V_χ-изотипная компонента этого представления состоит из таких функций $f : G \to \Bbbk$, что $f(gx) = \chi(g)f(x)$ для всех $x, g \in G$. Полагая в этом условии $x = e$, получаем для всех $g \in G$ равенство $f(g) = \chi(g) \cdot f(e)$, означающее, что все такие функции пропорциональны характеру χ. Тем самым, каждая изотипная компонента представления $\Bbbk^G$ одномерна, и его изотипное разложение имеет вид $\Bbbk^G = \bigoplus\limits_{\chi \in G^\wedge} \Bbbk \cdot \chi$. В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе.

Теорема 5.2 (двойственность Понтрягина[1])
Для каждого $g \in G$ функция вычисления $\mathrm{ev}_g : G^\wedge \to \Bbbk$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы $G^\wedge$, и сопоставление $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ задаёт изоморфизм групп $G \xrightarrow{\sim} G^{\wedge\wedge}$.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g) = \mathrm{ev}_g(\chi_1) \cdot \mathrm{ev}_g(\chi_2).$$

Равенства $\mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\, \mathrm{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G. В частности, $f(gx) = f(x)$ для всех функций $f : G \to \Bbbk$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, установленная нами инъективность гомоморфизма $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ влечёт его биективность. □

5.4.2. Проектор на инварианты. Рассмотрим теперь линейное представление V произвольной, не обязательно абелевой, группы G. Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G образуют в V подмодуль, называемый *модулем G-инвариантов* и обозначаемый

$$V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G \}.$$

Если группа G конечна и её порядок не делится на характеристику поля $\Bbbk$, каждое линейное представление V группы G допускает G-инвариантную проекцию на подмодуль инвариантов. Она обозначается $v \mapsto v^\natural$ («v-бекар») и сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести[2] его G-орбиты в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$:

$$v^\natural \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv, \tag{5-12}$$

Упражнение 5.13. Убедитесь прямым вычислением, что при $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^\natural$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G, а также приведите пример конечной группы G и неразложимого G-модуля V над конечным полем $\Bbbk$, имеющего ненулевой подмодуль инвариантов V^G.

[1] на самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь простейшими примерами таких групп

[2] если $|G| \vdots \mathrm{char}(\Bbbk)$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён корректно

Теорема 5.3
Любое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо[1].

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-инвариантного проектора. Группа G действует на пространстве всех линейных операторов $\mathrm{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция

$$\varphi \mapsto \varphi^{\natural} = |G|^{-1} \sum_{g} g\varphi g^{-1}$$

на инварианты этого действия переводит любой проектор $\pi : V \twoheadrightarrow U$ тоже в проектор V на U. Поскольку $g\pi g^{-1}U \subset U$ для всех $g \in G$, образ $\mathrm{im}\,\pi^{\natural} \subset U$. С другой стороны, любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^{\natural}$, т. к. $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1}u = gg^{-1}u = u$. □

5.5. Групповая алгебра. С каждой группой G канонически связана ассоциативная алгебра $\Bbbk[G]$, которая называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$ и представляет собою векторное пространство с базисом G, т. е. состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{g \in G} c_g\, g$ элементов группы с произвольными коэффициентами $c_g \in \Bbbk$, из которых только конечное число отлично от нуля. Сложение и умножение таких выражений происходит по стандартным правилам раскрытия скобок. При этом константы c_g по определению коммутируют с элементами группы и перемножаются так, как это происходит в поле $\Bbbk$, а элементы группы перемножаются согласно имеющемуся в группе закону композиции, т. е.

$$\begin{gathered} \Big(\sum_g a_g g\Big)\Big(\sum_h b_h h\Big) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f\,, \\ \text{где} \quad c_f = \sum_{gh=f} a_g b_h = \sum_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum_s a_s b_{s^{-1}f}\,. \end{gathered} \tag{5-13}$$

Группа G вложена в алгебру $\Bbbk[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление $G \to \mathrm{GL}(V)$ канонически продолжается по линейности до представления групповой алгебры $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G.

Упражнение 5.14. Докажите, что сопоставление целому числу m монома t^m устанавливает изоморфизм между а) групповой алгеброй $\Bbbk[\mathbb{Z}]$ аддитивной группы $\mathbb{Z}$ и кольцом полиномов Лорана $\Bbbk[t, t^{-1}]$ б) групповой алгеброй $\Bbbk[\mathbb{Z}/(n)]$ аддитивной группы вычетов $\mathbb{Z}/(n)$ и фактор кольцом $k[t]/(t^n - 1)$.

Замечательным примером элемента групповой алгебры является «усреднение»

$$\pi_{\mathbb{1}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \Bbbk[G]\,, \tag{5-14}$$

[1] т. е. является прямой суммой простых G-модулей

образом которого в каждом линейном представлении $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ является проектор (5-12) на подмодуль $V^G \subset V$ инвариантов представления ϱ.

Упражнение 5.15. Покажите, что элемент (5-14) лежит в центре[1] алгебры $\Bbbk[G]$.

5.5.1. Центр групповой алгебры конечной группы *G*

$$Z(\Bbbk[G]) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, x \in \Bbbk[G]\ zx = xz\} = \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, g \in G\ gzg^{-1} = z\}$$

состоит их таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h \in \Bbbk[G]$, коэффициенты z_h которых постоянны на классах сопряжённости. Поэтому элементы

$$z_C = \sum_{h \in C} h\,, \tag{5-15}$$

где C пробегает множество $\mathrm{Cl}(G)$ классов сопряжённости группы G, образуют базис групповой алгебры $\Bbbk[G]$. В частности, размерность центра равна $|\mathrm{Cl}(G)|$. Мы будем называть это число *числом классов*. Отметим, что все центральные элементы групповой алгебры в любом линейном представлении $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ изображаются операторами, лежащими в $\mathrm{End}_G(V)$. В частности, в неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

5.5.2. Изотипные разложения. Пусть G — конечная группа. Зафиксируем такое множество $\mathrm{Ir}(G)$ неприводимых представлений группы G, что любой неприводимый G-модуль изоморфен одному и только одному представлению из $\mathrm{Ir}(G)$. Мы будем обозначать элементы множества $\mathrm{Ir}(G)$ через $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U_\lambda)$ и писать в этом случае, что $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ или $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$. Согласно теор. 5.3 и предл. 5.4 на стр. 67 каждый конечномерный G-модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} V_\lambda\,, \tag{5-16}$$

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V, изоморфных заданному $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$, и является образом канонической свёртки

$$c : \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, W) \otimes U_\lambda \to V\,, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,. \tag{5-17}$$

В любом разложении V в прямую сумму простых G-модулей сумма всех тех слагаемых, что изоморфны U_λ, совпадает с V_λ, и их количество $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$, называется *кратностью* неприводимого представления λ в представлении V. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, каноническая свёртка (5-17) является изоморфизмом на изотипную компоненту V_λ, и для любых двух представлений V и W группы G

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\, m_\lambda(W) = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V)\,. \tag{5-18}$$

[1] напомню, что *центром* кольца или группы K называется множество всех элементов, мультипликативно коммутирующих со всеми элементами K

Пример 5.3 (левое регулярное представление)
Для каждого $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ λ-изотипную компоненту *левого регулярного представления* $g : x \mapsto gx$ группы G в $\Bbbk[G]$. Таким образом,

$$\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda . \tag{5-19}$$

Будучи G-подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\Bbbk[G]$, а т. к. правое умножение на любой элемент $h : x \to xh$ является G-автоморфизмом левого регулярного представления[1] и, тем самым, переводит каждую изотипную компоненту I_λ в себя, все I_λ являются также и правыми, а значит, двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda \cdot I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы получаем *соотношения ортогональности*

$$I_\lambda \cdot I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho . \tag{5-20}$$

Упражнение 5.16. Докажите, что I_λ являются минимальными по включению ненулевыми двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$, и что все двусторонние идеалы групповой алгебры исчерпываются прямыми суммами идеалов I_λ.

Лемма 5.3
Любое представление $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, не содержащее в своём разложении неприводимого представления λ, переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\Bbbk[G]$, для любого $v \in V$ подпространство $I_\lambda \cdot v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G-подмодулем в V, и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюрьективный гомоморфизм G-модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda \cdot v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ-изотипный подмодуль в λ-изотипный, подмодуль $I_\lambda \cdot v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V. Если она нулевая, то $I_\lambda \cdot v = 0$ для всех $v \in V$. □

Теорема 5.4 (теорема Машке)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ гомоморфизм алгебр

$$\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \to \prod_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda), \tag{5-21}$$

переводящий элемент $f \in \Bbbk[G]$ в набор операторов, которыми этот элемент действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Его ограничение на изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ является изоморфизмом I_λ на матричную алгебру $\mathrm{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма $\mathfrak{rep}$. Если элемент $h \in \Bbbk[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G-модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 5.3 каждое неприводимое

[1] ибо левое и правое умножение на любые два фиксированных элемента группы перестановочны друг с другом (обязательно продумайте это)

представление $\lambda : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (5-19) за исключением I_λ. Однако по теореме Бернсайда[1] оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\mathfrak{rep}\,|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. Отсюда сразу следует, что неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число и каждое из них присутствует в изотипном разложении (5-19) левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim(I_\lambda)/\dim(U_\lambda) = \dim \mathrm{End}(U_\lambda)/\dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюрьективности гомоморфизма $\mathfrak{rep}$ остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \mathrm{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, $\mathfrak{rep}(\sum\limits_\lambda f_\lambda) = \prod\limits_\lambda \varphi_\lambda$. □

Следствие 5.6

Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, характеристика которого не делит $|G|$, конечно и равно числу классов сопряжённости $|\mathrm{Cl}(G)|$ группы G, а сумма квадратов размерностей всех неприводимых равна порядку $|G|$. При этом $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (5-21). □

Пример 5.4 (простенькие представления симметрических групп)

Сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n-клеточными диаграммами Юнга[2]. Таким образом, неприводимые представления симметрической группы S_n биективно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга. У каждой симметрической группы S_n есть два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором перестановка σ действует умножением на знак $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Если характеристика поля не делит n, операторы симметризации и альтернирования

$$\mathrm{sym}_n = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} g \quad \text{и} \quad \mathrm{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

являются S_n-инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n-модуля.

Упражнение 5.17. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n-мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\Bbbk^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый вектором $e = \sum e_i$. Индуцированное представление в $(n-1)$-мерном фактор пространстве $\Bbbk^n \,/\, \Bbbk \cdot e$ называется *симплициальным*[3], поскольку над полем

[1] см. сл. 5.4 на стр. 66

[2] длины строк диаграммы суть длины независимых циклов, на которые раскладывается перестановка

[3] при $n = 2$ оно совпадает со знаковым

$\mathbb{R}$ его образ представляет собою несобственную группу правильного $(n-1)$-мерного симплекса с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю $\Bbbk \cdot e$.

Упражнение 5.18. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника, т. к. $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ-изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \overset{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3}(1+\operatorname{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\tau+\tau^2\right) ,$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

Упражнение 5.19. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ лежит в $Z\big(\Bbbk(S_3)\big)$, идемпотентен, аннулирует тривиальный и знаковый модули и действует тождественным оператором в представлении группой треугольника.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и 3-мерного представления несобственной группой тетраэдра имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $D_2 \subset S_4$. Равенство $2\cdot 1^2 + 2\cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список неприводимых представлений.

Упражнение 5.20. Покажите, что все 5 представлений действительно неприводимы, причём два трёхмерных представления не изоморфны и получаются одно из другого тензорным умножением на знаковое представление. После этого разложите в сумму неприводимых S_4-модулей представления группы вращений куба в пространстве функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней.

5.6. Представления Шура полной линейной группы. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле характеристики нуль, а V ненулевое конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. Изотипное разложение этого представления

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Ir}(S_n)} W_\lambda \tag{5-22}$$

называется разложением по *типам симметрии* тензоров. Про тензоры, лежащие в изотипной компоненте W_λ, говорят, что они имеют тип симметрии λ.

Пример 5.5 (квадратичные и кубические тензоры)
Два неприводимых представления группы $S_2 \simeq \mathbb{Z}/(2)$ задают разложение тензорного квадрата $V^{\otimes 2} = \operatorname{Sym}^2(V) \oplus \operatorname{Skew}^2(V)$. Группа S_2 действует на первом слагаемом тривиально, на втором — знакопеременно. Трём неприводимым представлениям S_3: тривиальному, знаковому и группой треугольника отвечает разложение

$$V^{\otimes 3} = \operatorname{Sym}^3(V) \oplus \operatorname{Skew}^3(V) \oplus W_\Delta , \tag{5-23}$$

компоненты которого являются образами S_3-инвариантных проекторов sym_3, alt_3 и π_Δ из прим. 5.4. Пространство неподвижных тензоров последнего

$$W_\Delta = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau t + \tau^2 t = 0\}$$

состоит из всех кубических тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Такие тензоры называются *лиевскими*[1], а соотношение $t + \tau t + \tau^2 t = 0$, которому они удовлетворяют, называется *тождеством Якоби*. S_3-орбита каждого лиевского тензора порождает в $V^{\otimes 3}$ двумерное векторное пространство, на котором S_3 действует как группа треугольника. Примером лиевского тензора служит

$$[u,[u,w]] = u \otimes u \otimes w - 2\,u \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes u\,,$$

где $u, w \in V$ — линейно независимые векторы, а $[a,b] \overset{\text{def}}{=} a \otimes b - b \otimes a$ обозначает коммутатор в тензорной алгебре $T(V)$.

Упражнение 5.21. Покажите, что подпространство $W_\Delta \subset V^{\otimes 3}$ является линейной оболочкой всех кубических тензоров, которые можно получить из векторов пространства V при помощи бинарной операции взятия коммутатора в $T(V)$.

5.6.1. Действие $\mathbf{GL}(V)\times S_n$ на $V^{\otimes n}$. Гомоморфизм групп $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}\left(V^{\otimes n}\right)$, переводящий $f \in \mathrm{GL}(V)$ в $f^{\otimes n}$, задаёт представление полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $V^{\otimes n}$, в котором оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует на разложимые тензоры по правилу $f : v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto fv_1 \otimes fv_2 \otimes \cdots \otimes fv_n$. Так как это действие перестановочно с действием симметрической группы, на пространстве $V^{\otimes n}$ имеется структура модуля над прямым произведением $\mathrm{GL}(V)\times S_n$: пара $f\times g \in \mathrm{GL}(V)\times S_n$ действует как $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n \mapsto f\left(v_{g(1)}\right)\otimes f\left(v_{g(2)}\right)\otimes\cdots\otimes f\left(v_{g(n)}\right)$. Будучи перестановочными с S_n, операторы из $\mathrm{GL}(V)$ переводят в себя каждую изотипную компоненту разложения $V^{\otimes n} = \bigoplus W_\lambda$ по типам симметрии тензоров. Поэтому каждое пространство W_λ тоже является модулем над $\mathrm{GL}(V) \times S_n$.

Для каждого неприводимого S_n-модуля U_λ на тензорном произведении

$$\mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \otimes U_\lambda$$

также есть структура $\mathrm{GL}(V)\times S_n$-модуля с действием $f\times g : \varphi\otimes u \mapsto (f^{\otimes n}\circ\varphi)\otimes(gu)$. Согласно предл. 5.3 свёртка $\varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)$ задаёт S_n-инвариантный изоморфизм[2]

$$c : \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \otimes U_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\lambda\,. \tag{5-24}$$

Очевидно, что он перестановочен с действием $\mathrm{GL}(V) \times S_n$. Пространство

$$\mathbb{S}^\lambda V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \tag{5-25}$$

с действием $\mathrm{GL}(V)$ по правилу $f : \varphi \mapsto f^{\otimes n}\circ\varphi$ называется *модулем Шура* над полной линейной группой $\mathrm{GL}(V)$.

---

[1] в честь норвежского математика Софуса Ли

[2] строго говоря, предл. 5.3 утверждает это над алгебраически замкнутым полем, однако мы увидим ниже, что все комплексные неприводимые представления S_n определены над $\mathbb{Q}$, так что для симметрических групп предл. 5.3 справедливо над $\mathbb{Q}$

Лемма 5.4
Линейная оболочка операторов вида $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{GL}(V)$ совпадает с централизатором $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right)$ действия S_n на $V^{\otimes n}$.

Доказательство. Цепочка канонических изоморфизмов $\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n^*} \otimes V^{\otimes n} \simeq$ $\simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq (V^* \otimes V)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$ отождествляет подалгебру $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right) \subset$ $\subset \mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)$ с подпространством симметрических тензоров

$$\mathrm{Sym}^n\left(\mathrm{End}(V)\right) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n},$$

которое линейно порождается тензорами вида $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{End}(V)$ в силу упр. 5.22 ниже. Утверждение леммы вытекает отсюда по упр. 5.23. □

Упражнение 5.22 (принцип Аронгольда). Покажите, что для любого конечномерного векторного пространства W над произвольным бесконечным полем пространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n(W) \subset W^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $w^{\otimes n} = w \otimes w \otimes \cdots \otimes w$.

Упражнение 5.23. Покажите, что линейная оболочка тензоров $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{End}(V)$ совпадает с линейной оболочкой тензоров $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{GL}(V)$.

Предложение 5.5
Все $\mathrm{GL}(V)$-модули Шура $\mathbb{S}^\lambda V = \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right)$ неприводимы.

Доказательство. Канонический изоморфизм $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\lambda$ из формулы (5-24) переводит действие S_n на W_λ в действие $g : \varphi \otimes u \mapsto \varphi \otimes (gu)$. Любой оператор $F \in \mathrm{End}(\mathbb{S}^\lambda V)$ задаёт линейное преобразование $F : \varphi \otimes u \mapsto F(\varphi) \otimes u$ пространства $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda$, перестановочное с действием S_n. По лем. 5.4 оно лежит в линейной оболочке операторов $f : \varphi \otimes u \mapsto \left(f^{\otimes n} \circ \varphi\right) \otimes u$. Следовательно, образ представления Шура $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{S}^\lambda V\right)$ линейно порождает всю алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}\left(\mathbb{S}^\lambda V\right)$ пространства $\mathbb{S}^\lambda(V)$. По упр. 5.7 такое представление неприводимо. □

5.6.2. Соответствие Шура – Вейля. Соответствие $U_\lambda \leftrightarrow \mathbb{S}^\lambda V$ между неприводимыми представлениями симметрических групп[1] и представлениями полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ называется *соответствием Шура – Вейля*. Тривиальному одномерному представлению группы S_n при этом отвечает представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $S^n V$, а одномерному знаковому представлению — представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $\Lambda^n V$. Можно показать, что ненулевые $\mathrm{GL}(V)$-модули $\mathbb{S}^\lambda V$ не изоморфны друг другу при разных λ и с точностью до тензорных умножений на одномерные представления $\det^m : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$, в которых $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует умножением на $\det^m(f)$ с фиксированным $m \in \mathbb{Z}$, исчерпывают все такие конечномерные неприводимые представления $\varrho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$, что элементы матрицы $\varrho(f)$ являются рациональными функциями элементов матрицы f.

[1]обратите внимание, что количество клеток n в диаграмме λ никак не связано с размерностью пространства V и может быть любым, однако некоторые пространства $\mathbb{S}^\lambda V$ при этом могут оказаться нулевыми, как это происходит, к примеру, с внешними степенями $\Lambda^n V$ при $n > \dim V$

§6. $\mathfrak{sl}_2$-модули.

6.1. Представления алгебр Ли. Всюду в этом разделе мы считаем, что $\Bbbk$ — произвольное поле характеристики нуль. Векторное пространство $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли*, если на нём задана билинейная операция «скобка» $[*, *] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющая *тождеству Якоби*: $\forall\, X, Y, Z \quad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$.

Например, на любой ассоциативной алгебре A над полем $\Bbbk$ имеется структура алгебры Ли, задаваемая *коммутатором* $[a, b] \overset{\text{def}}{=} ab - ba$.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что для коммутаторов выполняется тождество Якоби.

Эта алгебра Ли называется *коммутаторной алгеброй* ассоциативной алгебры A. Наоборот, для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеется единственная ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и линейное отображение $\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ переводящее $[X, Y]$ в $\nu(X)\nu(Y) - \nu(Y)\nu(X)$, такие что каждое линейное отображение $\psi : \mathfrak{g} \to A$ в ассоциативную алгебру, переводящее скобку в коммутатор, однозначно представляется в виде $\psi = \widetilde{\psi} \circ \nu$, где $\widetilde{\psi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр.

Упражнение 6.2. Удостоверьтесь, что это универсальное свойство определяет алгебру $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и линейное отображение $\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ однозначно с точностью до единственного перестановочного с ν изоморфизма ассоциативных алгебр.

Ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ называется *универсальной обёртывающей* алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Её можно построить как фактор тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу, порождённому всевозможными разностями $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \in \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{g}$.

Упражнение 6.3. Проверьте для такой фактор алгебры выполнение предыдущего универсального свойства.

Линейное отображение $\varrho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ называется *представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если оно переводит скобку в коммутатор, т. е. $\varrho([A, B]) = [\varrho(A), \varrho(B)]$. Пространство V называется в этой ситуации $\mathfrak{g}$-модулем. В силу универсального свойства универсальной обёртывающей алгебры, линейные представления алгебры Ли $\varrho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\widetilde{\varrho} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End}(V)$, т. е. линейным представлениям ассоциативной алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Представление $\widetilde{\varrho}$ отображает класс тензора $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_m$ в композицию $\varrho(A_1) \circ \varrho(A_2) \circ \ldots \circ \varrho(A_m)$, и его образ совпадает с ассоциативной оболочкой $\operatorname{Ass}\big(\varrho(\mathfrak{g})\big) \subset \operatorname{End}(V)$.

Прямая сумма $\mathfrak{g}$-модулей U и W наделяется структурой $\mathfrak{g}$-модуля с действием

$$F(u \dotplus w) \overset{\text{def}}{=} (Fu) \dotplus (Fw)\,.$$

Тензорные произведения, внешние и симметрические степени $\mathfrak{g}$-модулей также наделяются структурами $\mathfrak{g}$-модулей, однако в отличие от представлений групп, действие операторов $F \in \mathfrak{g}$ распространяется на произведения не по мультипликативности, а *по правилу Лейбница*: $F(u \otimes w) \overset{\text{def}}{=} (Fu) \otimes w + u \otimes (Fw)$, $F(u \wedge w) \overset{\text{def}}{=} (Fu) \wedge w + u \wedge (Fw)$, $F(u \cdot w) \overset{\text{def}}{=} (Fu) \cdot w + u \cdot (Fw)$. Для любого $\mathfrak{g}$-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является $\mathfrak{g}$-модулем с действием $F[v] \overset{\text{def}}{=} [Fv]$.

Упражнение 6.4. Убедитесь, что эти правила корректны и переводят коммутаторы в коммутаторы.

Двойственное представление $\varrho^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V^*)$ к представлению $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ определяется правилом $\varrho^*(F) \stackrel{\text{def}}{=} -\varrho(F)^*$ и взаимодействует со свёрткой по формуле

$$\langle\, \varrho^*(F)\,\xi\,,\, w\,\rangle + \langle\,\xi\,,\,\varrho(F)\,w\,\rangle = 0\,.$$

Действие $\mathfrak{g}$ на пространстве $\mathrm{Hom}(U, V)$ задаётся правилом

$$F : \varphi \mapsto [F, \varphi] \stackrel{\text{def}}{=} F\varphi - \varphi F\,. \tag{6-1}$$

Упражнение 6.5. Проверьте, что коммутатор при этом представится коммутатором и что канонический изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ согласован с действием $\mathfrak{g}$.

Подпространство неподвижных векторов представления (6-1) обозначается

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall F \in \mathfrak{g}\; F\varphi = \varphi F\}$$

и называется пространством $\mathfrak{g}$-*инвариантных* операторов[1].

6.2. Описание конечномерных неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. В различных областях математики важную роль играет алгебра Ли бесследных 2×2-матриц

$$\mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk) \mid \operatorname{tr} A = 0\}\,.$$

Обозначение связано с тем, что это векторное пространство состоит из касательных векторов к квадрике $\mathrm{SL}_2(\Bbbk) = \{g \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk) \mid \det g = 1\}$ в точке E.

Упражнение 6.6. Убедитесь в этом.

В качестве стандартного базиса в $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ мы используем матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6-2}$$

которые коммутируют по правилам:

$$[X, Y] = H\,, \quad [H, X] = 2\,X\,, \quad [H, Y] = -2\,Y\,. \tag{6-3}$$

Линейное представление $\mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ задаётся указанием трёх операторов $X, Y, H : V \to V$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6-3).

Пример 6.1 (стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули)
Дифференциальные операторы

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad Y = y\,\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad H = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{6-4}$$

действуют на пространстве многочленов $\Bbbk[x, y]$ сохраняя степень. Обозначим через $V_n \subset \Bbbk[x, y]$ подпространство однородных многочленов степени n. Действие операторов (6-4) на одномерном пространстве $V_0 \simeq \Bbbk$ нулевое, а на двумерном пространстве

[1] а также $\mathfrak{g}$-*гомоморфизмов*

V_1 задаётся в базисе x, y матрицами (6-2), т. е. является тавтологическим представлением $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ на $\Bbbk^2$. Действие операторов (6-4) на пространстве $V_n = S^n V_1$ является продолжением тавтологического представления на его симметрическую степень по правилу Лейбница.

Упражнение 6.7. Проверьте, что любой линейный дифференциальный оператор первого порядка $F = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ удовлетворяет правилу Лейбница и что коммутатор любых двух таких операторов также является линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Модули V_n называются *стандартными*. В базисе $e_k = x^k y^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$X(e_k) = (n-k)\,e_{k+1}\,, \quad Y(e_k) = k\,e_{k-1}\,, \quad H(e_k) = (2k-n)\,e_k \tag{6-5}$$

Предложение 6.1
Все стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули V_n неприводимы.

Доказательство. Разложим произвольный вектор $v \in V_n$ по базису $e_k = x^k y^{n-k}$ и обозначим через m наибольший из номеров базисных векторов, входящих в это разложение с ненулевым коэффициентом. В силу формул (6-5) векторы $X^k Y^m v$ с $0 \leqslant k \leqslant n$ являются ненулевыми кратными базисных векторов e_k. Следовательно, $\mathfrak{sl}_2$-орбита любого вектора v линейно порождает всё пространство V_n. □

Лемма 6.1
В любом $\mathfrak{sl}_2$-модуле операторы X и Y переводят каждое собственное подпространство оператора H с собственным значением λ в в собственные подпространства оператора H с собственными значениями $\lambda + 2$ и $\lambda - 2$ соответственно.

Доказательство. Пользуясь соотношениями $HX - XH = 2\,X$ и $HY - YH = -2Y$, получаем для вектора v с $Hv = \lambda v$ равенства $HXv = XHv + 2Xv = (\lambda+2)\,Xv$ и $HYv = YHv - 2Yv = (\lambda-2)\,Yv$. □

Определение 6.1
Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, находящиеся в ядре оператора X называются *примитивными*.

Лемма 6.2
Любой конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль над алгебраически замкнутым полем обладает примитивным вектором.

Доказательство. Рассмотрим произвольный весовой вектор v и подействуем на него возрастающими степенями оператора X. Получающиеся векторы $Xv, X^2v, \dots$ тоже являются весовыми со строго возрастающими весами. Поскольку у H имеется лишь конечное число ненулевых собственных подпространств с различными собственными значениями, в этой цепочке имеется конечное число ненулевых векторов. Последний из них и будет примитивным. □

Лемма 6.3
Вес каждого примитивного вектора в любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле над произвольным полем характеристики нуль является натуральным числом, и $\mathfrak{sl}_2$-орбита примитивного вектора веса m изоморфна стандартному модулю V_m.

Доказательство. Пусть $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. По лем. 6.1 векторы $v, Yv, Y^2v, \dots$ являются собственными для H с собственными числами $\lambda, (\lambda-2), (\lambda-4), \dots$ Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $Y^{m+1}v = 0$, а $Y^m v \neq 0$. Обозначим этот последний ненулевой вектор через v_0, а его предшественников — через $v_1, v_2, \dots$, так что вся цепочка примет вид

$$0 \xleftarrow{Y} v_0 \xleftarrow{Y} v_1 \xleftarrow{Y} v_2 \xleftarrow{Y} \ \dots \ \xleftarrow{Y} v_{m-1} \xleftarrow{Y} v_m \xrightarrow{X} 0$$

Оператор H действует на эту цепочку по формуле $Hv_i = (\lambda - 2(m-i))\,v_i$. Пользуясь соотношением $XY = YX + H$, вычисляем действие на цепочку оператора X:

$$\begin{aligned}
&Xv_m = 0\\
&Xv_{m-1} = XYv_m = YXv_m + Hv_m = \lambda v_m\\
&Xv_{m-2} = XYv_{m-1} = YXv_{m-1} + Hv_{m-1} = (2\lambda-2)\,v_{m-1}\\
&Xv_{m-3} = XYv_{m-2} = YXv_{m-2} + Hv_{m-2} = (3\lambda-(2+4))\,v_{m-2}\\
&\quad\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots\\
&Xv_{m-k} = XYv_{m-k+1} = YXv_{m-k+1} + Hv_{m-k+1} =\\
&\qquad\quad = \big(k\lambda - (2+4+\dots+2(k-1))\big)\,v_{m-k+1} = k(\lambda-k+1)\,v_{m-k+1}\\
&\quad\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots\\
&Xv_0 = m(\lambda-m+1)\,v_1
\end{aligned}$$

Следующий такой шаг даёт нулевой вектор

$$0 = XYv_0 = YXv_0 + Hv_0 = (m+1)(\lambda-m)\,v_0\,,$$

что возможно только при $\lambda = m$. В этом случае операторы X, Y, H действуют по формулам $X(v_k) = (m-k)(k+1)\,v_{k+1}$, $Y(v_k) = v_{k-1}$, $H(v_k) = (2k-m)\,v_k$ и отображение $v_k \mapsto \frac{1}{k!}\,x^k y^{m-k}$ отождествляет линейную оболочку векторов v_k с модулем V_m. □

Теорема 6.1
Конечномерные неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули над любым полем $\Bbbk$ характеристики нуль исчерпываются стандартными модулями V_n.

Доказательство. Обозначим через $\overline{\Bbbk} \subset \Bbbk$ какое-нибудь алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$ и рассмотрим тензорное произведение $\overline{V} = \overline{\Bbbk} \otimes V$ векторных пространств над полем $\Bbbk$. Правило $\lambda\cdot(\mu\otimes v) \overset{\text{def}}{=} (\lambda\mu)\otimes v$ наделяет $\overline{V}$ структурой векторного пространства над полем $\overline{\Bbbk}$, и любой $\Bbbk$-линейный оператор $F : V \to V$ продолжается до $\overline{\Bbbk}$ линейного оператора $\overline{F} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes F : \overline{V} \to \overline{V}$ (эта конструкция является непосредственным обобщением комплексификации вещественных векторных пространств).

Упражнение 6.8. Покажите, что для любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V над $\Bbbk$ векторы $\overline{e}_p = 1\otimes e_p$ образуют базис пространства $\overline{V}$ над $\overline{\Bbbk}$, и матрица оператора $\overline{F}$ в этом базисе совпадает с матрицей F в базисе e_p

Если пространство V является $\mathfrak{sl}_2$-модулем, то пространство $\overline{V}$ также является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия операторов $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и $\overline{H}$. В силу предыдущей леммы у оператора $\overline{H}$ существует целое собственное число. По упр. 6.8 оно является собственным числом и для оператора H на пространстве V. Повторяя рассуждения из доказательства лем. 6.2, заключаем, что в пространстве V имеется примитивный вектор, и тогда по лем. 6.3 он порождает в V стандартный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, который должен совпасть со всем V, поскольку V неприводимо. □

Упражнение 6.9. Докажите, что в любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле над любым полем $\Bbbk$ характеристики нуль оператор H диагонализуем и имеет целые собственные значения, а операторы X и Y нильпотентны.

6.3. Полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Сопоставление матрице $F \in \mathfrak{sl}_2$ оператора коммутирования $\mathrm{ad}_F : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2$, $Z \mapsto [F, Z]$, задаёт *присоединённое представление* $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$.

Упражнение 6.10. Проверьте, что $\mathrm{ad}_{[F,G]} = [\mathrm{ad}_F, \mathrm{ad}_G]$ и что $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия $F : \varphi \mapsto [\mathrm{ad}_F, \varphi]$.

На ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная форма следа $\mathrm{tr}(\varphi\psi)$. Её ограничение на образ присоединённого представления задаёт на $\mathfrak{sl}_2$ невырожденную симметричную билинейную *форму Киллинга*

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_G)\,.$$

Упражнение 6.11. Проверьте, что её матрица Грама в базисе X, Y, H равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, двойственным к базису X, Y, H относительно формы Киллинга является базис

$$X^* = \frac{1}{4}Y\,, \quad Y^* = \frac{1}{4}X\,, \quad H^* = \frac{1}{8}H\,.$$

Форма Киллинга отождествляет $\mathfrak{sl}_2$ с $\mathfrak{sl}_2^*$, переводя векторы F в ковекторы $G \mapsto (F, G)$. Это отождествление продолжается до изоморфизма

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2\,, \tag{6-6}$$

тождественного по второму тензорному сомножителю и переводящему тождественный эндоморфизм пространства $\mathfrak{sl}_2$ в *тензор Казимира*

$$X^* \otimes X + Y^* \otimes Y + H^* \otimes H = \frac{1}{4}\,(X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8}\,H \otimes H\,.$$

Каждое линейное представление $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ продолжается до представления

$$\tilde{\varrho} : \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)\,, \quad \tilde{\varrho}(A \otimes B) = \varrho(A)\varrho(B)\,.$$

Упражнение 6.12. Проверьте, что композиция представления $\tilde{\varrho}$ с изоморфизмом (6-6) является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей[1] $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{End}(V)$.

Представление $\tilde{\varrho}$ переводит тензор Казимира в оператор[2]

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\,(XY + YX) + \frac{1}{8}\,H^2\,,$$

который называется *оператором Казимира*. Из предыдущего упражнения вытекает, что $K \in \mathrm{End}_{\mathfrak{sl}_2}(V)$.

Упражнение 6.13. Убедитесь прямым вычислением, что K коммутирует с X, Y, H и действует на стандартном неприводимом модуле V_m гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{8}(m^2 + 4m)$.

Лемма 6.4

В любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле V к каждому подмодулю U коразмерности 1 имеется дополнительный 1-мерный тривиальный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль L, такой что $V = U \oplus L$.

Доказательство. Всякий одномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль с неизбежностью тривиален, ибо в коммутативной алгебре эндоморфизмов одномерного векторного пространства все коммутаторы нулевые, и значит, $H = [X,Y] = 0$, $2X = [H,X] = 0$, $2Y = [Y,H] = 0$. В частности, фактор модуль $V\,/\,U$ по любому подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, т. е. все три оператора X, Y, H переводят V в U.

Строить дополнительный к U тривиальный одномерный подмодуль L мы будем индуктивно по $\dim U$. Если подмодуль U тривиален, то и весь модуль V тривиален, т. к. по предыдущему замечанию $\mathfrak{sl}_2 V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2]V \subset \mathfrak{sl}_2\,\mathfrak{sl}_2 V \subset \mathfrak{sl}_2 U = 0$. В этом случае любое дополнительное к U одномерное подпространство $L \subset V$ является искомым подмодулем. Если $U \simeq V_m$ нетривиален и неприводим, оператор $\frac{8}{m^2+4m}K$ является согласно упр. 6.13 $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным проектором V на U, и искомый дополнительный подмодуль $L = \ker K$. Если же подмодуль U приводим, мы выберем в нём ненулевой неприводимый подмодуль $W \subsetneq U$ и сначала по индуктивному предположению построим $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное разложение фактор модуля $(V/W) = (U/W) \oplus (\tilde{L}/W)$, в котором $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\tilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \tilde{L}$, построим инвариантное разложение $\tilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный 1-мерный подмодуль $L \subset \tilde{L} \subset V$ является искомым дополнением к U. $\square$

Теорема 6.2

Всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль V вполне приводим, т. е. является прямой суммой стандартных простых модулей V_m из прим. 6.1 на стр. 79.

[1]действие $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ задаётся коммутированием с присоединённым действием, а действие на $\mathrm{End}(V)$ задаётся коммутированием с действием на V

[2]далее мы, как и ранее, опускаем символ ϱ, обозначим буквами X, Y, Z образы базисных операторов $\mathfrak{sl}_2$ в представлении ϱ

Доказательство. Чтобы построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор модуля V на произвольный его подмодуль $U \subset V$, рассмотрим в $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\mathrm{Hom}(V, U)$ подпространство $W = \{\varphi : \varphi|_U \in \Bbbk \cdot \mathrm{Id}_U\}$, а в нём — подпространство $W' = \{\varphi \in W : \varphi|_U = 0\}$.

Упражнение 6.14. Убедитесь, что W и W' являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями в $\mathrm{Hom}(V, U)$ и коразмерность W' в W равна 1.

По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, для некоторого тривиального $\mathfrak{sl}_2$-модуля $L \subset W$. Искомым проектором $V \twoheadrightarrow U$ является базисный вектор подмодуля L, отскалированный так, чтобы его ограничение на U было тождественным оператором. □

§7. Представления конечных групп.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, а $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, такое что $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

7.1. Скалярное произведение и базисные идемпотенты. Левое регулярное представление $L : \Bbbk[G] \hookrightarrow \mathrm{End}(\Bbbk[G])$ инъективно вкладывает групповую алгебру в алгебру всех линейных эндоморфизмов $\mathrm{End}(\Bbbk[G])$ векторного пространства $\Bbbk[G]$. На последней имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 7.1. Убедитесь, что значение билинейной формы $\mathrm{tr}(AB)$ на паре разложимых операторов $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$ равно $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, откуда вытекает и симметричность и невырожденность.

Ограничение этой формы на $L(\Bbbk[G])$ задаёт на $\Bbbk[G]$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}\left(L_f L_g\right) = \mathrm{tr}\left(L_{fg}\right) . \tag{7-1}$$

Поскольку след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{7-2}$$

Таким образом, скалярное произведение невырождено[1], и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^* = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \Bbbk[G]$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \tag{7-3}$$

Упражнение 7.2. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены другу другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk[G]$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым[2].

Изоморфизм $\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке[3] позволяет вычислять скалярные произведения (7-1) в терминах следов действия элементов в неприводимых представлениях.

Предложение 7.1 (формула Планшереля)
Для любых $f, g \in \Bbbk[G]$ $\quad (f, g) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \dim\left(U_\lambda\right) \cdot \mathrm{tr}\big(\lambda(fg)\big)$.

[1] отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так

[2] тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал

[3] см. теор. 5.4 на стр. 73

Доказательство. Вычислим $\operatorname{tr}\left(L_{fg}\right)$ в алгебре $\bigoplus\limits_{\lambda\in\operatorname{Ir}(G)} \operatorname{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме по всем неприводимым представлениям λ следов левого умножения на $\lambda(fg)$ в $\operatorname{End}(U_\lambda)$. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n\cdot\operatorname{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii} . □

Определение 7.1 (базисные идемпотенты)
Элементы $e_\lambda = \mathfrak{rep}^{-1}\left(0\,\dots\,,0,\,\operatorname{Id}_{U_\lambda},\,0,\,\dots\,0\right)\in I_\lambda\subset\Bbbk[G]$, действующие тождественным оператором в неприводимом представлении λ и нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях называются *базисными*[1] *идемпотентами*. Они образуют базис в центре групповой алгебры и перемножаются по правилам

$$e_\lambda e_\varrho = \begin{cases} e_\lambda & \text{при } \varrho=\lambda\\ 0 & \text{при } \varrho\neq\lambda\,. \end{cases} \tag{7-4}$$

В любом представлении $\Bbbk[G]\to\operatorname{End}(V)$ каждый из неприводимых идемнотентов e_λ действует как G-инвариантный проектор на λ-изотипную компоненту $V_\lambda\subset V$.

Упражнение 7.3. Проверьте, что главный левый идеал $\Bbbk[G]\cdot e_\lambda$ является минимальным (по включению) левым идеалом и как G-модуль (относительно действия G умножениями слева) изоморфен неприводимому представлению U_λ. Покажите также, что двусторонний идеал, порождённый e_λ, есть I_λ .

Следствие 7.1
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda,e_\lambda)=\dim^2 U_\lambda$. □

Следствие 7.2
Разложение $\Bbbk[G]=\bigoplus\limits_{\lambda\in\operatorname{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями* единицы $1\in\Bbbk[G]$ на идеалы I_λ.

Следствие 7.3
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right)\cdot g\,, \tag{7-5}$$

и каждое представление $\Bbbk[G]\to\operatorname{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda\subset V$.

Доказательство. Согласно формуле (7-3) $e_\lambda=|G|^{-1}\sum\limits_{\mu\in\operatorname{Ir}(G)}(g^{-1},e_\lambda)\cdot g$. По формуле Планшереля $(g^{-1},e_\lambda)=\sum\limits_{\mu\in\operatorname{Ir}(G)}\dim\left(U_\mu\right)\cdot\operatorname{tr}\left(\mu(g^{-1}e_\lambda)\right)=\dim\left(U_\lambda\right)\cdot\operatorname{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right)$, т. к. умножение слева на e_λ аннулирует все неприводимые U_μ с $\mu\neq\lambda$, а на U_λ действует тождественным оператором. □

[1] а также *неприводимыми* или *минимальными*

7.2. Характеры. Для произвольного линейного представления $\varrho : [G] \to \mathrm{GL}(V)$ линейная форма на $\Bbbk[G]$, сопоставляющая элементу след его действия на V

$$\chi_\varrho : \Bbbk[G] \to \Bbbk, \quad \chi_\varrho(f) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \varrho(f), \tag{7-6}$$

называется *характером*[1] представления ϱ. В силу того, что след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (7-5) для проектора на λ-изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

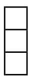
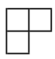
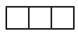
$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\lambda \left(g^{-1}\right) \cdot g\,, \tag{7-7}$$

Пример 7.1 (характеры перестановочных представлений)
Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e\,. \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\Bbbk^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 диаграммы λ. Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера S_n на классе сопряжённости C_λ, состоящем из перестановок циклового типа λ, равно $\chi_\Delta(C_\lambda) = m_1(\lambda) - 1$.

Упражнение 7.4. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	−1	1
треугольного	2	0	−1

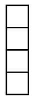
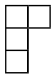
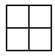
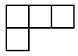
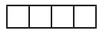
(7-8)

и что проекторы на изотипные копоненты, получающиеся из этой таблицы по формуле (7-7), совпадают с полученными ранее в прим. 5.4 на стр. 74.

[1] не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в n° 5.4.1 на стр. 69

Пример 7.2 (неприводимые характеры S_4)

Характеры геометрических представлений обычно легко вычисляются прямым сложением собственных значений соответствующих поворотов и отражений. Например, легко видеть, что значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 5.4 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	1	−1	0	−1
кубического	3	−1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

(7-9)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, −1 и −1; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1, ω, ω^2 и 1, i, $-i$.

Лемма 7.1

Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{7-10}$$

$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{7-11}$$

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{7-12}$$

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{7-13}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (7-10). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (7-11). Формула (7-12) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 5.4). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 7.5. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu V}(g)\,t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu V}(g)\,t^\nu = \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))}\,.$$

Следствие 7.4
Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V) \cdot \chi_\lambda \tag{7-14}$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda \,/\, \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G-модуля U_λ в V. □

7.2.1. Преобразование Фурье. Поскольку любая линейная форма однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство линейных форм $\Bbbk[G]^*$ естественно отождествляется с пространством $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$, так что функция $\varphi : G \to \Bbbk$ переходит в форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, продолжающую φ по линейности. С другой стороны, скалярное произведение на групповой алгебре задаёт изоморфизм

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]^*, \quad f \mapsto (f, *), \tag{7-15}$$

сопоставляющий вектору функционал скалярного умножения на этот вектор. Прообразом базиса $\Bbbk[G]^*$, двойственного к базису из элементов группы, при этом является базис из элементов $g^* = g^{-1} \,/\, |G|$. Комбинируя эти два отождествления, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G], \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \cdot g\,, \tag{7-16}$$

который иногда называют *преобразованием Фурье*. Согласно формуле (7-7) преобразование Фурье переводит характеры неприводимых представлений в элементы групповой алгебры, пропорциональные неприводимым идемпотентам:

$$\hat{\chi}_\lambda = \frac{1}{\dim U_\lambda} \cdot e_\lambda\,. \tag{7-17}$$

Перенесём при помощи изоморфизма (7-15) скалярное произведение из групповой алгебры в пространство функций на группе, полагая по-определению

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \psi\left(h^{-1}\right) (g,h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \psi\left(g\right) \tag{7-18}$$

Упражнение 7.6. Выясните, в какую операцию на групповой алгебре переходит поточечное умножение значений функций и какая операция над функциями соответствует умножению в групповой алгебре.

Из (7-17) и сл. 7.1 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие анализ представлений к формальным алгебраическим вычислениям с характерами.

Следствие 7.5
Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

Следствие 7.6
Для любых G-модулей V и W $\quad \dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.

Доказательство. Обе части равны $\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)m_\lambda(W)$: левая — по сл. 5.5, правая — в силу сл. 7.4 и ортонормальности характеров. □

Следствие 7.7
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (7-14) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 7.8
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. Из ортонормальности характеров и сл. 7.4 вытекает, что

$$(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} m_\lambda^2(V),$$

где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 7.7. Опишите все неприводимые представления и вычислите их характеры для групп: а) D_n б) A_4 в) A_5 г) S_5.

Замечание 7.1. (скалярное произведение комплексных характеров) Так как все элементы конечной группы аннулируются многочленом $t^{|G|} - 1$, все их собственные числа являются корнями $|G|$-той степени из единицы. Поэтому над полем $\mathbb{C}$ собственные числа оператора g^{-1} комплексно сопряжены собственным числам оператора g, и $\chi\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры на пространстве комплекснозначных функций:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g).$$

Замечание 7.2. (скалярное произведение характеров группы S_n) Так как цикловой тип обратных друг другу перестановок g, $g^{-1} \in S_n$ одинаков, такие перестановки сопряжены, и значит, $\chi\left(g^{-1}\right) = \chi(g)$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы виде стандартной евклидовой структуры на пространстве функций:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g).$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно *положительно определено*.

Пример 7.3 (внешние степени симплициального представления S_n)
Покажем, что все внешние степени симплициального представления Δ симметрической группы S_n неприводимы. Обозначим через τ тавтологичесое представление S_n перестановками базисных векторов в $\Bbbk^n$. Поскольку $\tau = \Delta \oplus \mathbb{1}$, его m-тая внешняя степень $\Lambda^m\tau = \Lambda^m\Delta \oplus \Lambda^{m-1}\Delta$.

Упражнение 7.8. Покажите, что $\Lambda^m(U \oplus W) \simeq \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=m} \Lambda^\alpha U \otimes \Lambda^\beta W$.

Таким образом, достаточно убедиться, что скалярный квадрат $\left(\chi_{\Lambda^k\tau}, \chi_{\Lambda^k\tau}\right) = 2$. В стандартном базисе $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ пространства $\Lambda^m(\Bbbk^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\operatorname{sgn} \sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I, что $\sigma(I) \subset I$. Поэтому

$$\left(\chi_{\Lambda^k\tau}, \chi_{\Lambda^k\tau}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \left(\sum_{I\,:\,\sigma(I)\subset I} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \right) \cdot \left(\sum_{J\,:\,\sigma(J)\subset J} \operatorname{sgn}(\sigma|_J) \right) =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{I,J\,:\,\substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!} \sum_{I,J} \sum_{\sigma\,:\,\substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J)\,.$$

Совокупность всех таких перестановок σ, что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, представляет собою прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \smallsetminus (I \cap J)$, $J \smallsetminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus (I \cup J)$ и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = k(I, J) = |I \cap J|$. Поскольку $\operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(s|_J) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\cap J})^2 \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)}) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!} \sum_{I,J} k! \cdot (n-2m+k)! \cdot \left(\sum_{g\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(g) \right) \cdot \left(\sum_{h\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(h) \right). \tag{7-19}$$

Последние две суммы ненулевые только при $k = m$ и $k = m - 1$, когда они равны 1. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (7-19) равен

$$\frac{1}{n!} \sum_I m! \cdot (n-m)! = 1\,,$$

ибо состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых $\binom{m}{n}^{-1}$. Во втором случае $|I \cap J| = (m-1)$ и соответствующий кусок суммы (7-19) равен

$$\frac{1}{n!} \sum_{I\cap J} \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\notin I\cap J}} (m-1)! \cdot (n-m-1)!\ ,$$

т. е. представляет собою $\binom{n}{m-1} \cdot (n-m+1)(n-m)$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m-1)! \cdot (n-m-1)!}{n!} = \binom{n}{m-1}^{-1} \cdot \frac{1}{(n-m+1)(n-m)}\,,$$

что тоже равно 1.

7.2.2. Кольцо представлений. Целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров конечной группы G образуют коммутативное подкольцо с единицей в алгебре $\Bbbk[G]$ всех функций $G \to \Bbbk$ с операциями поточечного сложения и умножения значений. Это подкольцо называется *кольцом представлений* группы G и обозначается

$$\mathrm{Rep}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} \mathbb{Z} \cdot \chi_\lambda \subset \Bbbk^G .$$

Название связано с тем, что в силу предыдущего линейные комбинации неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. При этом сложению и умножению в $\mathrm{Rep}(G)$ отвечают прямая сумма и тензорное произведение соответствующих представлений. Элементы кольца $\mathrm{Rep}(G)$, содержащие отрицательные кратности неприводимых характеров, называются *виртуальными представлениями*.

7.3. Индуцированные представления. Пусть ассоциативная $\Bbbk$-алгебра A с единицей является подалгеброй ассоциативной $\Bbbk$-алгебры B с той же единицей, что и в A. Любое представление W алгебры B одновременно является и представлением алгебры A. Пространство W, рассматриваемое как модуль над A, называется *ограничением* B-модуля W на A и обозначается $\mathrm{res}\, W$ или $\mathrm{res}_A^B W$, если важно указать, о каких B и A идёт речь. Простейшим примером этой ситуации является овеществление комплексных векторных пространств: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то n-мерное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $W_\mathbb{R} = \mathrm{res}_\mathbb{R}^\mathbb{C} W$ размерности $2n$.

Наоборот, по любому A-модулю V можно построить B-модуль

$$\mathrm{ind}\, V = B \bigotimes_A V ,$$

который называется *индуцированным* с A-модуля V и определяется как фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными разностями $ba \otimes v - b \otimes av$ с $b \in B$, $a \in A$ и $v \in V$. По построению, в пространстве $B \bigotimes_A V$ выполняются равенства $ba \bigotimes_A v = b \bigotimes_A av$, т. е. элементы алгебры A «проносятся» через знак тензорного произведения. Поэтому такое произведение называется *тензорным произведением над* A. Структура модуля над B задаётся правилом

$$b(b' \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} (bb') \otimes v .$$

Простейшим примером этой ситуации является комплексификация вещественного векторного пространства: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то из n-мерного вещественного векторного пространства V можно изготовить комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ той же размерности n, но уже над полем $\mathbb{C}$.

Если важно указать алгебры B и A явно, мы будем писать $\mathrm{ind}_A^B V$.

Предложение 7.2

Отображение $\tau_A : V \to B \bigotimes_A V$, $v \mapsto 1 \bigotimes_A v$, является A-гомоморфизмом, и для любого A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ в любой B-модуль W существует единственный такой

B-гомоморфизм $\psi : B \underset{A}{\otimes} V \to W$, что $\psi \circ \tau_A = \varphi$. Иначе говоря, для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{ind}\, V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{res}\, W), \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_A . \tag{7-20}$$

Доказательство. Для каждого B-гомоморфизма $\psi : B \underset{A}{\otimes} U \to V$ композиция

$$\varphi = \psi \circ \tau_A : V \to W, \quad v \mapsto \psi(1 \underset{A}{\otimes} u)$$

является A-гомоморфизмом, поскольку $\varphi(av) = \psi(1 \underset{A}{\otimes} av) = \psi(a \underset{A}{\otimes} v) = a\psi(1 \underset{A}{\otimes} v) = a\varphi(v)$. Тем самым, отображение (7-20) определено корректно. Для данного A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ такой B-гомоморфизм $\psi : B \underset{A}{\otimes} V \to W$, что $\varphi = \psi \circ \tau_A$, обязан действовать на разложимые тензоры по правилу $b \otimes v \mapsto b\varphi(v)$. Тем самым, он единствен. Будучи билинейным по b и v, это правило корректно задаёт линейный оператор $B \otimes V \to W$, который переводит соотношения $ba \otimes v - b \otimes av$ в нуль: $ba\psi(v) - b\psi(av) = 0$ в силу A-линейности ψ. Поэтому он корректно спускается до линейного отображения $B \underset{A}{\otimes} V \to W$, перестановочность которого с левым умножением на элементы $b \in B$ очевидна. □

Упражнение 7.9. Убедитесь, что универсальное свойство из предл. 7.2 определяет B-модуль $B \underset{A}{\otimes} V$ вместе с A-линейным отображением τ_A однозначно с точностью до единственного B-линейного изоморфизма, перестановочного с τ_A, и проверьте, что ограничение и индуцирование представлений перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями представлений.

7.3.1. Индуцированные представления групп. В ситуации, когда $B = \Bbbk[G]$ и $A = \Bbbk[H]$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и произвольной её подгруппы $H \subset G$, ограничение и индуцирование сопоставляют каждому линейному представлению $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ его *ограничение* $\mathrm{res}\, W$ на подгруппу H

$$\mathrm{res}\, \varrho \stackrel{\text{def}}{=} \varrho|_H : H \to \mathrm{GL}(W),$$

а каждому линейному представлению $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)$ — *индуцированное* им представление $\mathrm{ind}\, \lambda : G \to \mathrm{GL}(\Bbbk[G] \underset{k[H]}{\otimes} V)$ группы G, так что имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}\, V, W) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{res}\, W)$. Если необходимо подчеркнуть, о каких группе G и подгруппе $H \subset G$ идёт речь, мы будем писать res_H^G и ind_H^G.

На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\mathrm{Rep}(H) \underset{\mathrm{res}}{\overset{\mathrm{ind}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}(G)$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения (7-18) на $\Bbbk^G$

$$(\chi_{\mathrm{ind}\, V}, \chi_W)_{\Bbbk^G} = (\chi_V, \chi_{\mathrm{res}\, W})_{\Bbbk^H} .$$

В частности, кратность неприводимого G-модуля $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U)$ в разложении представления, индуцированного с неприводимого H-модуля $\mu : H \to \mathrm{GL}(S)$, равна кратности S в разложении ограничения V на подгруппу H:

$$m_\lambda(\operatorname{res}\mu) = m_\mu(\operatorname{ind}\lambda)\ . \tag{7-21}$$

Это равенство называется *законом взаимности Фробениуса*[1].

Предложение 7.3 (транзитивность индуцирования)
Для пары вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$ и любого представления $\varrho : K \to \mathrm{GL}(U)$ имеется канонический изоморфзм G-модулей $\operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U \xrightarrow{\sim} \operatorname{ind}_H^G U$.

Доказательство. Поскольку для любого G-модуля W имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_K(U,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\operatorname{ind}_K^H U, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U, W)$, $\psi \mapsto \psi \circ \tau_K \circ \tau_H$, отображение $\tau_K \circ \tau_H : U \to \operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U$ универсально в смысле предл. 7.2. По упр. 7.9 оно отождествляется с отображением $U \to \operatorname{ind}_K^G U$ единственным изоморфизмом. □

7.3.2. Строение индуцированного представления. Тензорное произведение

$$\Bbbk[G] \otimes U = \bigoplus_{g\in G} (\Bbbk \cdot g) \otimes V$$

представляет собою прямую сумму $|G|$ копий пространства V, занумерованных элементами $g \in G$. Факторизация по соотношениям $(gh)\otimes v = g\otimes(vu)$ склеивает между собою все прямые слагаемые, занумерованные элементами из одного смежного класса gH так, что $gh \otimes v$ отождествляется с $g \otimes hv$. В результате тензорное произведение над $\Bbbk[H]$ оказывается изоморфно прямой сумме $r = [G : H]$ копий пространства V занумерованных какой-либо фиксированной системой $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ представителей классов смежности

$$\Bbbk[G] \bigoplus_{\Bbbk[H]} V \simeq g_1V \oplus g_2V \oplus g_3V \oplus \cdots \oplus g_rV\,. \tag{7-22}$$

В этом разложении каждое $g_\nu V$ представляет собой копию пространства V, а стоящий слева значок g_ν указывает, что данная копия соответствует смежному классу $g_\nu H$. Если писать $g_\nu v$ для обозначения вектора $v \in V$, лежащего в g_ν-той копии $g_\nu V$ пространства V, то векторы $w \in \Bbbk[G] \bigotimes_{k[H]} V$ однозначно запишутся суммами вида

$$\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu v_\nu\,, \quad \text{где} \quad v_\nu \in V\,.$$

Левое умножение на элемент $g \in G$ в группе G осуществляет перестановку смежных классов: для любого $g \in G$ и каждого $\nu = 1, 2, \dots, r$ найдутся единственные элемент $h = h(g,\nu) \in H$ и номер $\mu = \mu(g,\nu)$, $1 \leqslant \mu \leqslant s$, такие что $gg_\nu = g_\mu h$. В этих обозначениях действие элемента $g \in G$ на вектор $g_\nu v \in g_\nu V$ происходит по правилу $gg_\nu v \stackrel{\text{def}}{=} g_\mu hv \in g_\mu V$, где $hv \in V$ есть результат действия оператора $h \in H$ на вектор $v \in V$ в соответствии с представлением подгруппы H в $\mathrm{GL}(V)$.

[1] или *двойственностью Фробениуса*

Пример 7.4
Пусть $G = S_3$ и $H \simeq S_2$ — подгруппа, порождённая транспозицией $\sigma = |12\rangle$. В качестве представителей смежных классов G/H выберем e, τ и τ^2, где $\tau = |123\rangle$. Представление $W = \operatorname{ind} \mathbb{1}$, индуцированное тривиальным одномерным представлением, трёхмерно с базисом e, τ, τ^2 и образующие $\sigma, \tau \in S_3$ действуют на этот базис матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тем самым, W изоморфно тавтологическому представлению S_3 и является суммой тривиального одномерного представления и двумерного представления группой треугольника. Представление $W' = \operatorname{ind} \operatorname{sgn}$, индуцированное одномерным знаковым представлением, также трёхмерно с тем же базисом, но σ и τ теперь действуют на него матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление является прямой суммой знакового представления в одномерном пространстве, натянутом на $e + \tau + \tau^2$ и треугольного представления в ортогональной плоскости. Представление, индуцированное с двумерного левого регулярного представления $\Bbbk[S_2]$, это 6-мерное левое регулярное представление группы S_3 в

$$\Bbbk[S_3] = e \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau^2 \cdot \Bbbk[S_2]\,.$$

Упражнение 7.10. Убедитесь, что регулярное представление любой подгруппы всегда индуцирует регулярное представление объемлющей группы.

Предложение 7.4
Если группа G имеет абелеву подгруппу $H \subset G$, то размерность любого неприводимого представления группы G не превышает[1] индекса $[G : H]$.

Доказательство. Пусть представление U группы G неприводимо, и L — одномерный H-подмодуль в $\operatorname{res} U$. В силу взаимности Фробениуса $\operatorname{ind} L$ содержит U с ненулевой кратностью, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{ind} L = [G : H]$. □

Предложение 7.5
Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение $C \cap H = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_m$ различных классов H-сопряжённости. Тогда для любого представления V подгруппы H характер индуцированного им представления принимает на классе C значение

$$\chi_{\operatorname{ind} V}(C) = [G : H] \cdot \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \,/\, |C|\,.$$

[1] ниже, в **??** мы увидим, что если абелева подгруппа H нормальна в G, то размерности всех неприводимых группы G делят индекс $[G : H]$

В частности, для тривиального одномерного представления $V = \mathbb{1}$ имеем

$$\chi_{\mathrm{ind}\,\mathbb{1}} = [G : H] \cdot |C \cap H| / |C| . \tag{7-23}$$

Доказательство. Поскольку элемент $g \in C$ переставляет слагаемые $g_\nu V$ разложения (7-22), след его действия равен сумме следов действий на тех слагаемых $g_\nu V$, которые остаются при этой перестановке на месте, что означает равенство $gg_\nu = g_\nu h$ для некоторого $h = g_\nu^{-1} g g_\nu \in H$. При этом действие элемента g на таком слагаемом $g_\nu V$ совпадает с действием элемента h на пространстве V, и его след равен $\chi_V(h) = \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu)$. Поэтому

$$\chi_{\mathrm{ind}\,V}(g) = \sum_{\substack{\nu:\\ g_\nu^{-1} g g_\nu \in H}} \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G:\\ s^{-1} g s \in H}} \chi_V(s^{-1} g s) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{s \in G:\\ s^{-1} g s \in D_i}} \chi_V(D_i) .$$

Во втором равенстве мы заменили каждое слагаемое левой суммы на $|H|$ равных друг другу слагаемых, получающихся заменой g_ν на всевозможные $s \in g_\nu H$, а в третьем — собрали вместе все слагаемые, у которых $s^{-1} g s$ лежит в одном классе H-сопряжённости D_i. Поскольку всего имеется $|D_i|$ различных произведений $s^{-1} g s \in D_i$ и каждое из них по формуле для длины орбиты получается из $|G| / |C|$ различных $s \in G$,

$$\chi_{\mathrm{ind}\,V}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \cdot |G| / |C| ,$$

что и утверждалось. □

Упражнение 7.11 (формула проекции). Убедитесь, что для любых G-модуля W и H-модуля V имеется канонический изоморфизм G-модулей[1]

$$\mathrm{ind}\big((\mathrm{res}\, W) \otimes V\big) \simeq W \otimes \mathrm{ind}\, V .$$

7.3.3. Коиндуцированные представления. В теории представлений ассоциативных алгебр имеется ещё один способ сопоставить A-модулю V модуль над алгеброй B, содержащей A в качестве подалгебры, а именно — *коиндуцированный модуль*

$$\mathrm{coind}\, V \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_A(B, V) ,$$

на котором имеется *левое* действие алгебры B *правым* умножением аргумента:

$$b : \psi \mapsto b\psi , \quad \text{где} \quad b\psi(b') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi(b'b) .$$

Упражнение 7.12. Проверьте равенство $(b_1 b_2)\psi = b_1(b_2\psi)$.

Коиндуцированный модуль обладает универсальным свойством, двойственным к описанному в предл. 7.2. А именно, каноническое отображение

$$\tau^A : \mathrm{Hom}_A(B, V) \to V , \quad \varphi \mapsto \varphi(1) ,$$

[1] тензорные произведения в обеих частях суть тензорные произведения представлений групп H и G, описанные в n° 5.4 на стр. 68

A-линейно, и для любого B-модуля W и любого A-гомоморфизма $\varphi : W \to V$ существует единственный B-гомоморфизм $\psi : W \to \mathrm{Hom}_A(B, V)$, такой что $\tau^A \circ \psi = \varphi$. То есть для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_B\,(W, \mathrm{coind}\,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\,(\mathrm{res}\,W, V)\,, \quad \psi \mapsto \tau^A \circ \psi\,, \tag{7-24}$$

сопоставляющий B-гомоморфизму $\psi : W \to \mathrm{Hom}_A(B, V)$, $w \mapsto \psi_w$, A-гомоморфизм

$$\tau^A \circ \psi : W \to V\,, \quad w \mapsto \psi_w(1)\,.$$

Обратное отображение переводит A-гомоморфизм $\varphi : W \to V$ в B-гомоморфизм

$$\psi : W \to \mathrm{Hom}_A(B, V)\,, \quad w \mapsto \psi_w\,, \quad \text{где}$$
$$\psi_w : B \to V\,, \quad b \mapsto \varphi(bw)\,.$$

Упражнение 7.13. Убедитесь, что оба гомоморфизма корректно определены и обратны друг другу.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$, $B = \Bbbk[G]$ суть групповые алгебры конечной группы G и её подгруппы $H \subset G$, преобразование Фурье[1] индуцирует изоморфизм векторных пространств $\Phi \otimes \mathrm{Id}_V : \mathrm{Hom}(\Bbbk[G], V) \simeq \Bbbk[G]^* \otimes V \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] \otimes V$, действующий на операторы ранга 1 по правилу

$$\xi \otimes v \mapsto \hat{\xi} \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi\left(g^{-1}\right) \cdot g \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \otimes \left(\xi \otimes v(g^{-1})\right)\,,$$

а значит, переводящий произвольный линейный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ в тензор

$$\widehat{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(g)\,,$$

называемый *преобразованием Фурье* оператора φ. Преобразование Фурье перестановочно с левым действием G, ибо для всех $s \in G$

$$\widehat{s\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes s\varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(gs) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} sg^{-1} \otimes \varphi(g) = s\widehat{\varphi}\,,$$

а его композиция с проекцией $\Bbbk[G] \otimes V \twoheadrightarrow \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V$ устанавливает изоморфизм подпространства H-инвариантных операторов $\mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G], V) \subset \mathrm{Hom}(\Bbbk[G], V)$ с индуцированным G-модулем $\mathrm{ind}\,V = \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V$.

Упражнение 7.14. Докажите последнее утверждение.

Таким образом, индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы канонически изоморфны друг другу посредством преобразования Фурье.

[1] см. формулу (7-16) на стр. 89

§8. Представления симметрических групп

8.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Будем называть диаграмму Юнга λ, в каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква[1] алфавита $\{1, \dots, m\}$ *заполнением* формы λ. Заполнение T называется *стандартным*, если число букв совпадает с числом клеток диаграммы: $m = |\lambda|$, и каждая буква используется ровно один раз. Заполнение T называется *таблицей*, если его символы нестрого возрастают слева направо вдоль строк диаграммы и строго возрастают сверху вниз вдоль столбцов. Число всех таблиц формы λ в алфавите $\{1, \dots, m\}$ мы обозначаем через $d_\lambda(m)$, а число стандартных таблиц формы λ — через d_λ. Числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. Как мы видели в прим. 4.1 на стр. 50

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n \quad \text{и} \quad \sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{8-1}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга. С каждым стандартным заполнением T формы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ и веса $\sum \lambda_i = n$ связаны две подгруппы $R_T, C_T \subset S_n$, которые мы будем называть *строчной* и *столбцовой* подгруппами заполнения T. Строчная подгруппа R_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждой строки заполнения T. Аналогично, столбцовая подгруппа C_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждого столбца. Таким образом, $R_T \simeq S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ и $C_T \simeq S_{\lambda_1^t} \times S_{\lambda_2^t} \times \dots \times S_{\lambda_m^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_m^t)$ здесь и всюду далее означает транспонированную к λ диаграмму.

Упражнение 8.1. Убедитесь в том, что симметрическая группа S_n транзитивно действует перестановками букв на стандартных заполнениях фиксированной формы λ и что $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$ и $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ для любой перестановки $g \in S_n$.

Напомним[2], что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ, если

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}\,.$$

В этом случае мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$. Если диаграмма λ лексикографически больше диаграммы μ, мы пишем $\lambda > \mu$. Отметим, что в этом случае диаграмма μ не может доминировать диаграмму λ.

Лемма 8.1
Если форма μ стандартного заполнения U не является строго доминирующей над формой λ стандартного заполнения T одного и того же веса $|\mu| = |\lambda|$, то имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

[1] при этом могут использоваться не все буквы, а используемые буквы могут повторяться
[2] см. формулу (4-13) на стр. 54

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U. Из того, что все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существование перестановки $q_1 \in C_U$, переводящей все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения $q_1 U$. Из того, что все элементы второй строки T тоже лежат в разных столбцах U, вытекает существование такой не затрагивающей элементов из первой строки заполнения T перестановки $q_2 \in C_{q_1 U} = C_U$, что в заполнении $q_2 q_1 U$ каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо в первой[1], что влечёт неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$. Продолжая в эдаком духе, мы получим такую последовательность перестановок $q_1, q_2, \dots, q_k \in C_U$, где k — количество строк в диаграмме μ , что $q_i \in C_{q_{i-1} \cdots q_1 U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а также все элементы i-той строки T, лежащие в заполнении $q_{i-1} \cdots q_1 U$ в столбцах высоты $< i$, а все остальные элементы из i-той строки T переводит в i-тую строку заполнения $q_i q_{i-1} \cdots q_1 U$. В частности, при каждом i будет выполняться неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$, что по условию леммы возможно только при $\lambda = \mu$. В этом случае каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_i q_{i-1} \cdots q_1 U$. Поэтому $q_k \cdots q_1 U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 8.1
Перестановка $g \in S_n$ тогда и и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT, и в этом случае представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно.

Доказательство. Если $U = pqT$, где $p \in R_T$, $q \in C_T$, то элементы из одной строки T очевидно лежат в разных столбцах U. Наоборот, пусть никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце $U = gT$. По лем. 8.1 найдутся перестановки $p \in R_T$ и $q \in C_U$, такие что $pT = qU = qgT$, откуда $p = qg$. Записывая $q \in C_{gT} = gC_T g^{-1}$ как $gq_1 g^{-1}$ с $q_1 \in C_T$, получаем $g = pq_1^{-1}$, что и требовалось. Единственность разложения $g = pq$ вытекает из того, что $R_T \cap C_T = \{e\}$. □

8.2. Симметризаторы Юнга. Элементы групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$

$$r_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum_{\sigma \in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sigma\,, \tag{8-2}$$

$$s_T = r_T \cdot c_T = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot pq \tag{8-3}$$

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*. Они обладают следующими очевидными свойствами:

$$\forall g \in S_n \quad r_{gT} = g r_T g^{-1}\,, \quad c_{gT} = g c_T g^{-1} \quad \text{и} \quad s_{gT} = g s_T g^{-1} \tag{8-4}$$

$$\forall p \in R_T \; p r_T = r_T p = r_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \; \operatorname{sgn}(q) \cdot q c_T = \operatorname{sgn}(q) \cdot c_T q = c_T \tag{8-5}$$

[1]последнее происходит, когда этот элемент изначально находится в столбце высоты 1

$$\forall p \in R_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \quad \operatorname{sgn}(q) \cdot p s_T q = s_T\,. \tag{8-6}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (8-6).

Лемма 8.2
Векторное подпространство $E_T = \{\sigma \in \mathbb{C}[S_n] \,|\, \forall p \in R_T \ \forall q \in C_T \ \operatorname{sgn}(q) \cdot p\sigma q = \sigma\}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T.

Доказательство. Покажем, что всякий элемент $\sigma = \sum\limits_{g \in S_n} x_g g \in E_T$ равен $x_e \cdot s_T$. Условие $\operatorname{sgn}(q) \cdot p\sigma q = \sigma$ означает, что $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot x_g$ для любого $g \in S_n$. Полагая $g = e$, получаем $x_{pq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot x_e$, откуда $\sigma = x_e \cdot s_T + \sum\limits_{g \notin R_T C_T} x_g g$. Проверим, что все коэффициенты x_g в последней сумме нулевые. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 8.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения $U = gT$. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит и в R_T, и в $C_U = gC_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 8.3
$s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$, причём $s_T^2 = n_\lambda \cdot s_T$, где $n_\lambda = n!/\dim\big(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\big)$ — положительное рациональное число, зависящее только от формы λ заполнения T.

Доказательство. Из равенств (8-5) – (8-6) вытекает, что при любом $x \in \mathbb{C}[S_n]$ элемент $s_T \cdot x \cdot s_T$ обладает свойством (8-6) и, тем самым, лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C} \cdot s_T$ из лем. 8.2. В частности, $s_T^2 = n_T \cdot s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора $\mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ правого умножения на элемент $s_T : x \mapsto x \cdot s_T$. С одной стороны, из формулы (8-3) вытекает, что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения $g \cdot s_T$ равен единице, откуда $\operatorname{tr}(s_T) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n. Поскольку последнее вполне приводимо, существует такой S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}[S_n]$, что $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}[S_n]$ внутрь $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$, а на идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\operatorname{tr}(s_T) = n_T \cdot \dim\big(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\big)$. Следовательно, $n_T = n!/\dim\big(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\big)$ рационально и положительно. Поскольку $s_{gT} = g s_T g^{-1} \Rightarrow s_{gT}^2 = g s_T^2 g^{-1} = n_T g s_T g^{-1} = n_T s_{gT}$, число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Лемма 8.4
Если форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то

$$r_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot c_U = c_U \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot r_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_U = 0\,.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $r_T \cdot g \cdot c_U = c_U \cdot g \cdot r_T = 0$ для всех $g \in S_n$. Пусть для начала $g = e$. По лем. 8.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому $r_T \cdot c_U = (r_T \cdot \tau) \cdot c_U = r_T \cdot (\tau \cdot c_U) = -r_T \cdot c_U$ и

$c_U \cdot r_T = -(c_U \cdot \tau) \cdot r_T = -c_U \cdot (\tau \cdot r_T) = -c_U \cdot r_T$, откуда $r_T \cdot c_U = c_U \cdot r_T = 0$. Теперь и для любого $g \in S_n$ получаем $r_T \cdot g \cdot c_U = r_T \cdot g c_U g^{-1} \cdot g = \left(r_T \cdot c_{gU}\right) \cdot g = 0$ и $c_U \cdot g \cdot r_T = c_U \cdot g r_T g^{-1} \cdot g = \left(c_U \cdot r_{gT}\right) \cdot g = 0$. □

Теорема 8.1

Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$ представляет собою оператор правого умножения на элемент $w = \pi(1) \in W$, поскольку $\pi_W(x) = \pi_W(x \cdot 1) = x \cdot \pi_W(1) = x \cdot w$ для всех $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Так как $s_T \cdot W \subset s_T \cdot V_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T \cdot W = 0$, либо $s_T \cdot W = \mathbb{C} \cdot s_T$. В первом случае $W \cdot W \subset V_T \cdot W = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \cdot W = 0$, откуда $w \cdot w = 0$. Следовательно, правое умножение на w аннулирует левый идеал $W = \mathbb{C}[S_n] \cdot w$, а значит, $W = 0$. Во втором случае $s_T \in s_T \cdot W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим. Если заполнения T и U имеют разные формы — скажем, форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то по лем. 8.4 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно согласно лем. 8.3 действует нетривиально: элемент $s_T \in V_T$ является собственным вектором левого умножения на s_T с ненулевым собственным значением $n_{\lambda(T)}$. Поэтому представления V_T и V_U не изоморфны. Отсюда следует последнее утверждение теоремы: число попарно неизоморфных неприводимых представлений V_{T_λ} равно числу классов сопряжённости в S_n. Если заполнение U имеет ту же форму λ, что и T_λ, то неприводимое представление V_U, будучи неизоморфным ни одному из представлений V_{T_μ} с $\mu \neq \lambda$, изоморфно именно представлению V_{T_λ}. □

8.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T \cdot r_T$. Множества $R_T C_T$ и $C_T R_T$, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

они различаются содержащимся в них циклом длины три: в $R_T C_T$ это цикл $|12\rangle \circ |13\rangle = |132\rangle$, а в $C_T R_T$ — цикл $|13\rangle \circ |12\rangle = |123\rangle$. Поэтому перестановка сомножителей в формуле (8-3) приводит к вообще говоря отличному от $s_T = r_T \cdot c_T$ симметризатору

$$s'_T = c_T \cdot r_T = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot qp \,, \tag{8-7}$$

получающемуся из s_T применением *антиподального антиавтоморфизма*

$$\alpha : \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S_n], \quad g \mapsto g^{-1} \quad \text{для } g \in G \,,$$

оставляющего r_T и c_T на месте и оборачивающего порядок сомножителей в произведениях.

Упражнение 8.2. Сформулируйте и докажите для симметризатора s'_T аналоги соотношений (8-6), лем. 8.4, лем. 8.3 и теор. 8.1.

Предложение 8.1
Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Операторы правого умножения на c_T и r_T являются гомоморфизмами левых S_n-модулей

$$V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_T r_T \underset{x \cdot r_T \leftarrow\!\shortmid x}{\overset{x \mapsto x \cdot c_T}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}[S_n] \cdot r_T c_T = V_T$$

Композиция $x \mapsto x \cdot r_T c_T = x \cdot s_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. □

Следствие 8.2
Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Фиксируем какое-либо стандартное заполнение T формы λ и транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и $s_{T^t} = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \mathrm{sgn}(p) \cdot qp = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \mathrm{sgn}(q) \cdot \mathrm{sgn}(pq) \cdot qp = \sigma\left(s'_T\right)$, где $\sigma : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ обозначает *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, действующий на базис g по правилу $g \mapsto \mathrm{sgn}(g) \cdot g$. Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению S_n в пространстве $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$, заданному правилом $g : x \cdot s'_T \mapsto \mathrm{sgn}(g) \cdot gx \cdot s'_T$. Знаковый автоморфизм σ изоморфно отображает это пространство на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_{T^t}$, превращая последнее действие в левое умножение на $g : \sigma(x) \cdot s_{T^t} \mapsto g\sigma(x) \cdot s_{T^t}$. □

8.3. Модуль таблоидов. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ и обозначается через $\{T\}$. Действие симметрической группы $g : T \mapsto gT$ на заполнениях корректно спускается до действия $g : \{T\} \mapsto \{gT\}$ на таблоидах: $gR_T T = gR_T g^{-1} gT = R_{gT} gT$. Возникающее таким образом перестановочное представление S_n на пространстве формальных комплексных линейных комбинаций таблоидов формы λ называется *модулем таблоидов* и обозначается M_λ. Так как таблоиды формы λ биективно соответствуют левым смежным классам $gR_T \in S_n/R_T$ и действие S_n на таблоидах совпадает с действием на смежные классы, модуль таблоидов изоморфен представлению, индуцированному с тривиального одномерного представления подгруппы $R_T \subset S_n$: $M_\lambda \simeq \mathrm{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$.

Упражнение 8.3. Покажите, что представление S_n в пространстве M_λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot r_T$.

8.3.1. Характер модуля $\boldsymbol{M}_\lambda$ принято обозначать через ψ_λ. Чтобы его описать, рассмотрим класс сопряжённости $C_\mu \in \mathrm{Cl}(S_n)$, состоящий из всех перестановок циклового типа μ, и обозначим через m_j число строк длины j в диаграмме μ.

Предложение 8.2
Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ равно коэффициенту при m_λ в разложении симметрического многочлена Ньютона[1] $p_\mu(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n}$ по стандартному мономиальному базису[2] m_λ .

Доказательство. Так как m_i-тая степень i-той степенной суммы Ньютона имеет вид

$$p_i(x)^{m_i} = \left(x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i\right)^{m_i} = \sum_{\sum\limits_j \varrho_{ij} = m_i} \frac{m_i!}{\varrho_{i1}!\,\varrho_{i2}! \cdots \varrho_{in}!} x_1^{i\cdot\varrho_{i1}} x_2^{i\cdot\varrho_{i2}} \cdots x_n^{i\cdot\varrho_{in}}$$

коэффициент при $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ у $p_\mu(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n}$ равен

$$\sum_{\varrho_{ij}} \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!}{\prod\limits_{ij} \varrho_{ij}!}\,, \tag{8-8}$$

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $\varrho_{ij} \geqslant 0$, что

$$\sum_j \varrho_{ij} = m_i \quad \text{и} \quad \sum_i i \cdot \varrho_{ij} = \lambda_j\,. \tag{8-9}$$

С другой стороны, согласно установленной в предл. 7.5 на стр. 95 формуле (7-23) для характера индуцированного представления,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = [S_n : R_T] \cdot |C_\mu \cap R_T| / |C_\mu|\,, \tag{8-10}$$

где $[S_n : R_T] = n!/\prod\limits_j \lambda_j!$, $|C_\mu| = n!/\prod\limits_i i^{m_i} m_i!$, а пересечение $C_\mu \cap R_T$ состоит из непересекающихся классов R_T-сопряжёности D_ϱ, образованных всеми перестановками σ циклового типа μ, в которых ϱ_{ij} из m_i циклов длины i заполнены элементами из j-той строки заполнения T. Нумерующие эти классы наборы $\varrho = \{\varrho_{ij}\}$ состоят из неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условиям (8-9).

Упражнение 8.4. Убедитесь, что каждое множество перестановок D_ϱ циклового типа μ и в самом деле представляет собою ровно один класс R_T-сопряжённости.

При сопряжении группой R_T стабилизатор перестановки $\sigma \in \Delta_\varrho$ состоит из $\prod \varrho_{ij}!$ независимых перестановок циклов одинаковой длины между собою и $\prod i^{m_i}$ независимых циклических перестановок внутри самих циклов, так что

$$|C_\mu \cap R_T| \sum_\varrho |D_\varrho| = \sum_\varrho \prod_j \lambda_j! / \prod_{ij} i^{m_i} \varrho_{ij}!\,.$$

Подставляя эти значения в (8-10), после сокращений получаем в точности сумму (8-8), что и требовалось. □

[1] см. формулу (3-14) на стр. 36
[2] см. формулу (3-3) на стр. 32

8.4. Модуль Шпехта. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M_λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\cdot\{qT\}\,. \tag{8-11}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1T = pq_2T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (8-11) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M_λ, взятые с коэффициентами ± 1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля.

Линейная оболочка векторов (8-11), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем в M_λ, поскольку для всех $g \in S_n$

$$gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT}.$$

Этот подмодуль обозначается S_λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 8.5
Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_TM_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C}\cdot v_T & \text{при } \mu = \lambda\,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T\cdot\tau\{U\} = -c_T\{U\}\,, \tag{8-12}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Если в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, то по лем. 8.1 на стр. 98 заполнения U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = \operatorname{sgn}(q)\cdot c_T\{T\} = \pm v_T$, что и утверждалось. □

Теорема 8.2
Модуль Шпехта S_λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$, построенному по произвольному заполнению T формы λ.

Доказательство. Покажем сначала, что S_λ неприводим. Пусть имеется разложение $S_\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей. Тогда оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводит каждое из слагаемых в себя. Поскольку по лем. 8.5

$$c_TS_\lambda \subset c_T\cdot M_\lambda = \mathbb{C}\cdot v_T\,,$$

ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = gv_T$, а значит, совпадает с S_λ. При $\mu \neq \lambda$ неприводимые представления S_λ и S_μ не изоморфны: скажем, если λ лексикографически меньше μ, то по лем. 8.5 оператор c_T аннулирует модуль $S_\mu \subset M_\mu$, а на модуле S_λ действует нетривиально, т. к. $c_Tv_T = c_Tc_T\{T\} = |C_T|\cdot c_T\{T\} = |C_T|\cdot v_T$. Из сказанного вытекает, что модуль S_λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}[S_n]\cdot r_Uc_U$, где U — произвольное заполнение формы μ. Поскольку по лем. 8.4 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с лексикографически меньшими λ диаграммами μ, мы заключаем, что $S_\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 8.3
В разложении представления M_λ в прямую сумму неприводимых встречаются только модули S_μ с $\mu \rhd \lambda$, а также модуль S_λ, входящий в это разложение с кратностью 1.

Доказательство. Поскольку оператор c_T переводит M_λ внутрь S_λ и нетривиально действует на S_λ, никаких других прямых слагаемых, изоморфных S_λ, в M_λ нет, т. е. S_λ входит в M_λ с кратностью 1. Если существует инъективный гомоморфизм $S_\mu \to M_\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, должен нетривиально действовать на M_λ. Но если $\mu \neq \lambda$ не является строго доминирующим над λ, то $c_U M_\lambda = 0$ по лем. 8.5. □

8.4.1. Табличный базис модуля Шпехта. Назовём *столбцовой развёрткой* заполнения T диаграммы λ слово, которое получится при прочтении заполнения T по столбцам, так что каждый столбец читается снизу вверх, а сами столбцы перебираются слева направо. Например, столбцовая развёртка стандартной таблицы

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}$$

это слово 21534. Линейно упорядочим все стандартные заполнения T формы λ, полагая $T \succ U$, если наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, встречается в столбцовой развёртке заполнения T раньше, чем в столбцовой развёртке заполнения U.

Упражнение 8.5. Проверьте, что это отношение транзитивно.

Например, 120 стандартных заполнений формы $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array}$ выстроятся по убыванию так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 4&2\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 4&1\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 4&3\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 4&1\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 4&2\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\\hline 3&2\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \cdots$$

$$\cdots \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\\hline 2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline 1&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline 3&4\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\\hline 3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline 1&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline 2&4\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}.$$

Главная особенность введённого порядка состоит в том, что для любой *стандартной таблицы*[1] T и любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ выполняются строгие неравенства $pT \succ T \succ qT$, ибо самое большое число в любом цикле перестановки p сдвигается влево, а самое большое число в любом цикле перестановки q сдвигается вверх. В частности, каждая стандартная таблица T является минимальным элементом своей R_T-орбиты $R_T T$. Из этого вытекает, что для любого заполнения $U \prec T$ таблоид $\{U\} \neq \{T\}$ в модуле M_λ.

Упражнение 8.6. Покажите, что $c_T\{U\} = 0$ для любых двух стандартных таблиц U, T, таких что $U \succ T$.

Теорема 8.3
Векторы v_T, где T пробегает множество стандартных таблиц формы λ, образуют базис модуля Шпехта S_λ. В частности, $\dim S_\lambda = d_\lambda$.

[1] см. n° 8.1 на стр. 98

Доказательство. Покажем, что d_λ векторов v_T, построенных по всем стандартным таблицам T, линейно независимы. Выражение вектора $v_T = \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot \{qT\}$ через базисные векторы $\{U\}$ пространства M_λ имеет вид $v_T = \{T\} + \sum_{U \prec T} \varepsilon_U \cdot \{U\}$, где $\varepsilon_U = -1, 0, 1$, а всякая линейная зависимость между ними может быть записана в виде[1] $v_T = \sum_{U \prec T} x_U \cdot v_U$. Раскладывая векторы v_T и v_U по базису из таблоидов, мы получаем равенство вида $\{T\} = \sum_{U \prec T} y_U \cdot \{U\}$, невозможное в силу того, что $\{T\} \neq \{U\}$ ни для какого $U \prec T$. Из линейной независимости векторов v_T вытекает неравенство $\dim S_\lambda \geqslant d_\lambda$. С другой стороны, второе равенство из форм. (8-1) на стр. 98 и соотношение на сумму квадратов размерностей неприводимых представлений из сл. 5.6 на стр. 74 влекут равенство $\sum d_\lambda^2 = n! = \sum \dim^2 S_\lambda$. Поэтому $\dim S_\lambda = d_\lambda$. □

8.5. Кольцо представлений симметрических групп. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ аддитивную абелеву группу классов изоморфных представлений симметрической группы S_n, т. е. свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $[V_\lambda]$, где V_λ пробегает множество представителей всех классов изоморфных *неприводимых* представлений S_n, так что каждое неприводимое представление S_n изоморфно одному и только одному представлению V_λ. Иначе $\mathfrak{R}_n$ можно описать как целочисленную линейную оболочку неприводимых характеров S_n в пространстве функций $S_n \to \mathbb{C}$. Положим также $\mathfrak{R}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}$. Мы собираемся снабдить прямую сумму

$$\mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{R}_n$$

структурой *градуированного*[2] коммутативного кольца с единицей. Подчеркнём, что градуированное умножение на кольце $\mathfrak{R}$, которое мы сейчас введём, будет *отличаться* от обсуждавшегося в n° 7.2.2 на стр. 92 умножения $[U], [W] \mapsto [U \otimes W]$, имеющегося на каждом из $\mathfrak{R}_n$ в отдельности.

8.5.1. Умножение в кольце $\mathfrak{R}$. Каждая пара представлений $\varphi : S_k \to \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \to \mathrm{GL}(W)$ задаёт представление

$$\varphi \times \psi : S_k \times S_m \to \mathrm{GL}(U \otimes W), \quad (g, h) : u \otimes w \mapsto gu \otimes hw. \tag{8-13}$$

Вложим $S_k \times S_m$ в S_{k+m} в качестве подгруппы, сохраняющей разбиение

$$\{1, 2, \dots, k+m\} = \{1, 2, \dots, k\} \sqcup \{k+1, k+2, \dots, k+m\}, \tag{8-14}$$

образуем представление $\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)$ группы S_{k+m}, индуцированное представлением (8-13), и положим $[\varphi] \cdot [\psi] \stackrel{\text{def}}{=} [\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)]$. Если вместо разбиения (8-14) воспользоваться другим разбиением $\{1, \dots, k+m\} = I \sqcup J$ на непересекающихся подмножества из k и m элементов, получится другая подгруппа $S_k \times S_m \subset S_{k+m}$, сопряжённая к использованной выше, и представление $\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)$, индуцированное с этой подгруппы, будет изоморфно предыдущему.

Упражнение 8.7. Убедитесь в этом.

[1] для этого надо оставить слева ненулевой член с максимальным индексом T, а все остальные члены перенести направо

[2] т. е. такого, что $\mathfrak{R}_k \cdot \mathfrak{R}_m \subset \mathfrak{R}_{k+m}$

Таким образом, класс $[\varphi] \cdot [\psi]$ не зависит от выбора разбиения (8-14), используемого для его построения. В частности, умножение (8-13) коммутативно. Его ассоциативность вытекает из того, что для любых трёх представлений ξ, η и ζ групп S_k, S_ℓ и S_m, оба класса $([\xi] \cdot [\eta]) \cdot [\zeta]$ и $[\xi] \cdot ([\eta] \cdot [\zeta])$ совпадают с классом представления S_{m+n+k}, индуцированного с представления подгруппы $S_k \times S_\ell \times S_m \subset S_{m+n+k}$ в тензорном произведении пространств представлений ξ, η и ζ по правилу

$$(g_1, g_2, g_3) \mapsto \xi(g_1) \otimes \eta(g_2) \otimes \zeta(g_3).$$

Упражнение 8.8. Убедитесь в этом.

Дистрибутивность умножения по отношению к прямым суммам представлений следует из дистрибутивности тензорных произведений.

Лемма 8.6
Кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от счётного числа переменных, отвечающих классам тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом классы модулей таблоидов

$$[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_2}] \cdot \cdots \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1} [\mathbb{1}_2]^{\ell_2} \cdots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n},$$

где ℓ_i обозначает количество строк длины i в диаграмме λ, образуют базис кольца $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из сл. 8.3 вытекает, что классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ выражаются через неприводимые классы $[S_\lambda]$ при помощи верхней треугольной матрицы с целыми коэффициентами и единицами по главной диагонали. Поэтому классы $[M_\lambda]$ образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$. Поскольку представление M_λ, отвечающее диаграмме $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots S_{\lambda_n} \subset S_{|\lambda|}$, класс $[M_\lambda]$ является произведением классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]$ групп S_{λ_i}. Вместе с тем $[\mathbb{1}_{\lambda_i}] = [M^{(\lambda_i)}]$ это тоже модуль таблоидов, состоящих из одной строки длины λ_i. Поэтому совокупность мономов от классов тривиальных представлений в точности совпадает с совокупностью классов модулей таблойдов, а их формальное перемножение как мономов, совпадает с умножением в кольце $\mathfrak{R}$. □

8.5.2. Скалярное произведение в кольце $\mathfrak{R}$. Обозначим через $([U], [W])$ евклидово скалярное произведение на $\mathfrak{R}$, для которого базис из классов неприводимых представлений $[V_\lambda]$ является ортонормальным. Сумма $\mathfrak{R} = \bigoplus \mathfrak{R}_k$ является ортогональной относительно такого скалярного произведения, а для любых двух классов

$$[U] = \sum_{|\lambda|=n} k_\lambda \cdot [V_\lambda] \quad \text{и} \quad [W] = \sum_{|\lambda|=n} m_\lambda \cdot [V_\lambda],$$

лежащих в одной и той же компоненте $\mathfrak{R}_n$, выполняется равенство

$$([U], [W]) = \sum_{|\lambda|=n} k_\lambda m_\lambda = \dim \operatorname{Hom}_{S_n}(U, W) = \left(\chi_U, \chi_W\right)_n, \tag{8-15}$$

где $\left(\chi_U, \chi_W\right)_n$ означает скалярное произведение характеров в алгебре функций $\mathbb{C}^{S_n}$. Для каждой диаграммы μ обозначим через m_i число её строк длины i и положим

$$z_\mu = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}, \tag{8-16}$$

так что число элементов в классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно $|C_\mu| = n!/z_\mu$. В силу зам. 7.2. на стр. 90 скалярное произведение характеров в правой части (8-15) переписывается в виде

$$\frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n}\chi_U(g)\chi_W(g) = \frac{1}{n!}\sum_\mu |C_\mu|\cdot\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu) = \sum_\mu z_\mu^{-1}\cdot\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu).$$

Таким образом, скалярное произведение классов представлений $[U], [W] \in \mathfrak{R}_n$ равно

$$([U],[W]) = \sum_\mu z_\mu^{-1}\cdot\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu). \tag{8-17}$$

8.5.3. Изоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ с кольцом симметрических функций. В n° 4.6 на стр. 59 мы ввели на кольце Λ симметрических функций с целыми коэффициентами скалярное произведение $\langle *, * \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным, базис из полных симметрических функций h_λ является двойственным к мономиальному базису m_λ, а полиномы Ньютона p_λ образуют ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ со скалярными квадратами $\langle p_\lambda, p_\lambda\rangle = z_\lambda$. Согласно предл. 8.2 на стр. 103 значения $\psi_\lambda(C_\mu)$ характера ψ_λ таблоидного представления M_λ совпадают с коэффициентами разложения ньютоновской симметрической функции p_μ по мономиальному базису m_λ:

$$p_\mu = \sum_\lambda \psi_\lambda(C_\mu)\cdot m_\lambda,$$

а значит, равны скалярным произведениям симметрических функций p_λ с элементами двойственного к мономиальному базиса из полных симметрических многочленов: $\psi_\lambda(C_\mu) = \left\langle p_\mu, h_\lambda \right\rangle$, которые в свою очередь являются коэффициентами разложения полных симметрических многочленов h_λ по ортогональному базису $z_\mu^{-1}\cdot p_\mu$:

$$h_\lambda = \sum_\mu z_\mu^{-1}\left\langle p_\mu, h_\lambda\right\rangle p_\mu = \sum_\mu z_\mu^{-1}\cdot\chi_{M_\lambda}(C_\mu)\cdot p_\mu. \tag{8-18}$$

Сравнение равенств (8-18) и (8-17) подсказывает следующий результат:

Теорема 8.4

Существует изометрический изоморфизм колец $\mathrm{ch} : \mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \Lambda$, переводящий классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ в полные симметрические многочлены h_λ, классы неприводимых представлений $[S_\lambda]$ — в многочлены Шура s_λ, а инволюцию на классах представлений, заданную тензорным умножением на одномерное знаковое представление, — в каноническую инволюцию[1] ω на Λ, переводящую друг в друга s_λ и s_{λ^t},

[1] см. сл. 4.2 на стр. 58

а также h_λ и e_λ. Этот изоморфизм корректно задаётся формулой[1]

$$\mathrm{ch}([U]) \overset{\text{def}}{=} \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\mu) \cdot p_\mu \,. \tag{8-19}$$

Доказательство. Отображение (8-19) очевидно линейно по $[U]$:

$$\mathrm{ch}([U]+[W]) = \mathrm{ch}([U \oplus W]) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_{U\oplus W}(C_\mu) \cdot p_\mu =$$
$$= \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \big(\chi_U(C_\mu) + \chi_W(C_\mu)\big) \cdot p_\mu = \mathrm{ch}([U]) + \mathrm{ch}([W]) \,.$$

Согласно лем. 8.6 на стр. 107 и сл. 3.4 на стр. 36 оба кольца $\mathfrak{R}$ и Λ являются кольцами многочленов от счётного числа переменных: первое — от классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k, второе — от простейших полных симметрических многочленов[2] h_k (в обоих случаях k пробегает $\mathbb{N}$). В силу соотношения (8-18) отображение ch переводит каждый базисный моном

$$[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_2}] \cdot \,\cdots\, \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1}[\mathbb{1}_2]^{\ell_2} \cdots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$$

(где ℓ_i есть количество строк длины i в диаграмме λ) в базисный моном

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdot \,\cdots\, \cdot h_{\lambda_n} = h_1^{\ell_1} h_2^{\ell_2} \cdots h_n^{\ell_n}$$

с сохранением мультипликативной структуры, ибо $\mathrm{ch}\big([\mathbb{1}_k]\big) = h_k$. Тем самым, отображение (8-19) является корректно определённым изоморфизмом колец. Ортогональность отображения ch вытекает из формулы (8-17) и того, что полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами $\langle\, p_\lambda \,,\, p_\lambda \,\rangle = z_\lambda$:

$$\langle\, \mathrm{ch}([U]) \,,\, \mathrm{ch}([W]) \,\rangle = \sum_{\lambda,\mu} z_\lambda^{-1} z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\lambda)\chi_W(C_\mu) \cdot \big\langle\, p_\mu \,,\, p_\lambda \,\big\rangle =$$
$$= \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(g)\chi_W(g) = ([U],[W]) \,.$$

Из сл. 8.3 на стр. 105 вытекает, что ортонормальный базис $[S_\lambda]$ выражается через таблоидный базис $[M_\lambda]$ при помощи нижней унитреугольной матрицы:

$$[S_\lambda] = [M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu] \,.$$

Согласно форм. (4-21) на стр. 58 полные симметрические многочлены h_λ выражаются через многочлены Шура s_λ также при помощи нижней унитреугольной матрицы[3]

$$h_\lambda = \sum_\mu K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu \,.$$

[1] не смотря на то, что она содержит знаменатели

[2] напомню, что $h_k(x)$ представляет собою сумму всех мономов полной степени k (см. n° 3.3 на стр. 35)

[3] напомню, что *число Костки* $K_{\mu,\lambda}$ равно количеству таблиц формы μ, заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, и т. д. и отлично от нуля только при $\mu \trianglerighteq \lambda$, а все $K_{\lambda,\lambda} = 1$ (см. формулы (4-12) – (4-13) на стр. 54)

Поэтому выражение ch $([S_\lambda])$ через полиномы Шура тоже задаётся некой нижней унитреугольной матрицей:

$$\operatorname{ch}([S_\lambda]) = \operatorname{ch}\big([M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]\big) = h_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda} h_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda} s_\mu .$$

Из равенств $1 = ([S_\lambda],[S_\lambda]) = \langle \operatorname{ch}([S_\lambda]), \operatorname{ch}([S_\lambda]) \rangle = \langle s_\lambda , s_\lambda \rangle + \sum_{\mu \rhd \lambda} y^2_{\mu\lambda} \langle s_\mu , s_\mu \rangle = 1 + \sum_{\mu \rhd \lambda} y^2_{\mu\lambda}$ вытекает, что все $y_{\mu\lambda} = 0$, т. е. ch $([S_\lambda]) = s_\lambda$. Утверждение об инволюциях вытекает из сл. 8.2 на стр. 102 и сл. 4.2 на стр. 58. □

Следствие 8.4 (правило Юнга)
Кратность вхождения неприводимого представления S_μ в модуль таблоидов M_λ равна числу Костки $K_{\mu,\lambda}$.

Следствие 8.5 (правило Литлвуда – Ричардсона)
Кратность вхождения неприводимого представления $[S^\nu]$ в представление $[S_\lambda] \cdot [S_\mu]$ равна коэффициенту Литтлвуда – Ричардсона[1] $c^\nu_{\lambda\mu}$ из разложения $s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu$.

Следствие 8.6 (правило ветвления индуцированных представлений)
Представление группы S_{n+1}, индуцированное неприводимым представлением S_λ подгруппы $S_n \subset S_{n+1}$, является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается добавлением одной клетки к диаграмме λ.

Доказательство. Поскольку $[\operatorname{ind}(S_\lambda)] = [S_\lambda] \cdot [\mathbb{1}_1]$, утверждение вытекает из предыдущего следствия и формулы Пьери[2] для вычисления $s_\lambda \cdot h_1$. □

Следствие 8.7 (правило ветвления ограниченных представлений)
Ограничение неприводимого представления S_λ группы S_n на подгруппу $S_{n-1} \subset S_n$ является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается выкидыванием одной клетки из диаграммы λ.

Доказательство. Это получается из предыдущего следствия по двойственности Фробениуса: кратность вхождения неприводимого представления S_μ в res S_λ равна кратности вхождения неприводимого представления S_λ в ind S_μ. □

Следствие 8.8 (формула Фробениуса для характеров S_n)
Значение характера χ_λ неприводимого представления S_λ симметрической группы S_n на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$ равно каждому из следующих трёх чисел:

- коэффициенту при $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu(x)$ в разложении многочлена Шура $s_\lambda(x)$ по базису $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu(x)$ в векторном пространстве $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$

[1] см. теор. 4.2 на стр. 56
[2] см. упр. 4.5 на стр. 57

- коэффициенту при $s_\lambda(x)$ в разложении многочлена Ньютона $p_\mu(x)$ по базису Шура $s_\lambda(x)$ в $\mathbb{Z}$-модуле Λ

- коэффициенту при одночлене $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене

$$p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n} \cdot \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

где $p_k(x) = \sum\limits_i x_i^k$ суть степенные суммы Ньютона, число m_i равно количеству строк длины i в диаграмме μ, а $\Delta_\delta(x)$ это определитель Вандермонда.

Доказательство. Первое вытекает прямо из теор. 8.4. Поскольку система многочленов p_μ ортогональна со скалярными квадратами z_μ, коэффициент при $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu(x)$ в разложении s_λ по базису p_μ равен скалярному произведению $\langle s_\lambda, p_\mu \rangle$, которое в свою очередь равно коэффициенту при s_λ в разложении p_μ по ортонормальному базису s_λ, что даёт второе представление. Записывая s_λ по формуле Якоби – Труди как отношение определителей $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x) / \Delta_\delta(x)$ и умножая обе части разложения

$$p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \Delta_{\lambda+\delta}(x) / \Delta_\delta(x)$$

на Δ_δ, получаем разложение $p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \Delta_{\lambda+\delta}(x)$, означающее, что $\chi_\lambda(C_\mu)$ равен коэффициенту разложения кососимметрического многочлена $p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x)$ по стандартному детерминантному базису[1] $\Delta_{\lambda+\delta}(x)$. □

8.5.4. Размерности неприводимых представлений. Размерность модуля Шпехта S_λ равна значению неприводимого характера χ_λ на единице, то есть — по формуле Фробениуса — коэффициенту при $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене

$$p_1^n \cdot \Delta_\delta = \left(\sum x_i\right)^n \cdot \det\left(x_i^{j-1}\right) =$$
$$= \sum_{m_1 m_2 \dots m_n} \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x_1^{\sigma(1)-1} x_2^{\sigma(2)-1} \cdots x_n^{\sigma(n)-1}$$

Обозначим длины строк строго убывающей диаграммы $\eta = \lambda + \delta$ через $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Коэффициент при $x^\eta = x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \cdots x_n^{\eta_n}$ в написанном произведении равен

$$\sum_\sigma \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot n!}{\prod\limits_j (\eta_j - \sigma(j) + 1)!} = \frac{n!}{\eta_1! \cdot \eta_2! \cdot \cdots \cdot \eta_n!} \cdot \sum_\sigma \prod_j \eta_j \cdot (\eta_j - 1) \cdot \cdots \cdot (\eta_j - \sigma(j) + 2)$$

где суммирование происходит по всем перестановкам $\sigma \in S_n$, для которых каждое из n чисел $\eta_j - \sigma(j) + 1 \geqslant 0$, и j-тый сомножитель в последнем произведении в свою

[1] см. n° 3.1.2 на стр. 33

очередь является произведением $\eta_j - \sigma(j) + 1$ последовательно убывающих чисел, начинающихся с η_j. Такая сумма представляет собою определитель

$$\det \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ \eta_1(\eta_1 - 1) & \eta_2(\eta_2 - 1) & \cdots & \eta_n(\eta_n - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 \cdots (\eta_1 - n + 1) & \eta_2 \cdots (\eta_2 - n + 1) & \cdots & \eta_n \cdots (\eta_n - n + 1) \end{pmatrix}$$

Упражнение 8.9. Покажите, что он равен $\prod\limits_{i<j} (\eta_i - \eta_j)$.

Таким образом, нами установлено

Следствие 8.9 (формула Фробениуса для $\dim S_\lambda$)
Пусть $\eta = \lambda + \delta$, т. е. $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Тогда

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\eta_1! \cdot \eta_2! \cdot \cdots \cdot \eta_n!} \cdot \prod_{i<j} (\eta_i - \eta_j).$$

□

Упражнение 8.10 (формула крюков). Назовём *крюком* клетки a в диаграмме Юнга Г-образную поддиаграмму с углом в клетке a, состоящую из клетки a и всех клеток ниже a в том же столбце и всех клеток правее a в той же строке. Количество клеток в таком крюке обозначим через $\Gamma(a)$ и назовём *длиной крюка* клетки a. Докажите, что

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{a \in \lambda} \Gamma(a)}.$$

Например, для диаграммы $\lambda = (4, 2, 1)$ длины крюков суть

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

откуда размерность модуля Шпехта $S_{(4,2,1)}$ группы S_7 равна

$$\frac{7!}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35.$$

Нетривиальным следствием упр. 8.10 и теор. 8.3 на стр. 105 является возможность подсчитать количество стандартных таблиц формы λ по формуле крюков. Скажем, только что проделанное вычисление показывает, что имеется ровно 35 стандартных таблицы формы $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \, & \, & \, & \, \\ \hline \, & \, \\ \cline{1-2} \, \\ \cline{1-1} \end{array}$.

§9. Категории и функторы

9.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ — это класс[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задано множество морфизмов

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется отображение композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)\,, \quad (\varphi,\psi) \mapsto \varphi \circ \psi\,, \tag{9-1}$$

ассоциативное в том смысле, что $(\chi\circ\varphi)\circ\psi = \chi\circ(\varphi\circ\psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$ удовлетворяет условиям[2] $\varphi \circ \mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X \circ \psi = \psi$.

Объекты $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ называются *изоморфными*, что обозначается $X \simeq Y$, если между ними существуют такие две стрелки $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$. Эти стрелки называются взаимно обратными *изоморфизмами*.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$.

Категория называется *малой*, если её объекты составляют *множество*, а не больший класс. Вот типичные примеры категорий, *не являющихся* малыми:

- категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений
- категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений
- категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений
- категория $\mathcal{A}b$ абелевых групп и их гомоморфизмов

а также алгебры, кольца, группы и т. п. с соответствующими гомоморфизмами в качестве стрелок. Вот два важных примера малых категорий:

- каждое частично упорядоченное множество X это малая категория, объекты которой суть элементы $x \in X$, а стрелки это неравенства:

$$\mathrm{Hom}_X(x,y) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } x \leqslant y, \\ \text{пустое множество, когда } x \text{ и } y \text{ несравнимы.} \end{cases}$$

[1] нам бы не хотелось вдаваться в точную формализацию этого термина (столь же содержательную, как формализации арифметики и теории множеств, разбираемые в стандартном курсе математической логики); отметим лишь, что такая формализация возможна и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют

[2] обычная выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}' \circ \mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен

- важный частный случай предыдущей ситуации: со всяким топологическим пространством X связана категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств X и

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W\text{, если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W\text{.} \end{cases}$$

9.1.1. Малые категории и ассоциативные алгебры. Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e,e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в каком – нибудь коммутативном кольце K:

$$K[\mathcal{C}] = \bigoplus_{X,Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(X,Y)\otimes K = \left\{ \sum x_i\varphi_i \,\middle|\, \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}),\ x_i \in K \right\},$$

где для множества M мы обозначаем через $M\otimes K$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Умножение в алгебре $K[\mathcal{C}]$ задаётся композицией стрелок

$$\varphi\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi\circ\psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на их линейные комбинации. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[1], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего пространства $\mathrm{Hom}(X,Y)\otimes K$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f\circ f = f\circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, являющихся началами и концами стрелок, линейной комбинацией которых является f.

Пример 9.1 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы) Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок отображения[2]. Категория Δ_{big} не является малой[3], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0,\,1,\,\dots\,,\,n\}\,,\quad n \geqslant 0\,, \tag{9-2}$$

со стандартным порядком. Множество (9-2) называется n-мерным *ориентированным комбинаторным симплексом*, а категория Δ — категорией *комбинаторных симплексов*. Отметим, что для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\text{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм

$$n_X : X \xrightarrow{\sim} [n] \tag{9-3}$$

[1] возможно бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов

[2] т. е. такие $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$

[3] по упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 113

с *единственным* $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 9.1. Выясните, сколько всего стрелок в множестве $\mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$, сколько среди них инъективных и сколько сюрьективных, и покажите, что алгебра стрелок[1] $K[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{9-4}$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{9-5}$$

$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{9-6}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

9.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\,, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\mathrm{opp}} \circ \psi^{\mathrm{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением.

9.2. Функторы. Функтор[2] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений[3]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi)\,, \tag{9-7}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы это *гомоморфизмы* из одной алгебры стрелок в другую.

Если все отображения (9-7) сюрьективны, функтор F называется *полным*[4]. Образ такого функтора является полной подкатегорией.

Если все отображения (9-7) инъективны, функтор F называется *строгим*[5]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок.

Полные строгие функторы иногда называют *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[6], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре и являются строгими и обычно не полными.

---

[1] скажем, с коэффициентами в $\mathbb{Q}$

[2] иногда вместо слова «функтор» говорят *ковариантный функтор*

[3] по одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

[4] по-английски: *full*

[5] по-английски: *faithful*

[6] например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля

Пример 9.2 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\varDelta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[1]

$$\varDelta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\; x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{9-8}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение из одного такого симплекса в другой, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (9-5) и (9-6) алгебры стрелок категории $\varDelta$ переводятся этим функтором, соответственно, во *вложение i-той грани* $\varDelta^{(n-1)} \hookrightarrow \varDelta^n$ и в *вырождение вдоль i-того ребра*[2] $\varDelta^n \twoheadrightarrow \varDelta^{(n-1)}$.

9.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком* объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

Пример 9.3 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\varDelta_{\mathrm{s}} \subset \varDelta$ неполную подкатегорию, объектами которой являются комбинаторные симплексы: $\mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\varDelta$, а качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[3] отображения. Категория $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 9.2. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\varDelta_{\mathrm{s}}]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (9-5).

Предпучок множеств $X : \varDelta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов (9-8), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Каждую стрелку $\varphi : [n] \to [m]$ в категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ можно воспринимать как «название» для конкретной n-мерной грани m-мерного симплекса $[m]$, а отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет такому названию φ, — как *правило склейки*, указывающее, какой n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к данному m-мерному симплексу $x \in X_m$ в качестве φ-той n-мерной грани.

Упражнение 9.3. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[4] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом, а также триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными,

[1] т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$

[2] т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й

[3] т. е. сохраняющие порядок и инъективные

[4] т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты

шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом и д) триангуляция 2-мерного тора одним 0-мерным, тремя 1-мерными и двумя 2-мерным симплексами? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 9.4 (симплициальные множества)
Предпучок множеств $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Комбинаторный набор данных, который он кодирует, отличается от рассмотренных в предыдущем примере данных для склейки триангулированного пространства тем, что для каждого k-мерного симплекса $x \in X_k = X(k)$ и каждого отображения $\psi : [m] \twoheadrightarrow [k]$ с $m > k$ должен быть указан m-мерный симплекс $X(\psi)x \in X_m$, который приклеивается к пространству $|X|$ в виде k-мерного симплекса x, будучи предварительно вырожден согласно отображению ψ. Так, каждому элементарному вырождению (9-6), проектирующему симплекс на $(i+1)$-ю гипергрань вдоль ребра $[i, (i+1)]$, должно отвечать отображение $X(s_n^{(i)}) : X_{n-1} \to X_n$, которое указывает каждому $(n-1)$-симплексу $x \in X_{n-1}$, какой именно n-симплекс $X(s_n^{(i)})x \in X_n$ следует приклеить к пространству X в виде $(n-1)$-симплекса x, предварительно выродив его стягиванием ребра $[i, (i+1)]$ в одну вершину. Это позволяет описывать вырожденные «псевдотриангуляции», у которых не хватает «видимых» после склейки симплексов, но платой за такую возможность является непустота множеств $X(n)$ для *всех* n и необходимость задания бесконечного количества правил склейки $X(\varphi)$.

Например, «псевдотриангуляция» n-мерной сферы S^n, состоящая из одной 0-нульмерной вершины и одной n-мерной клетки, возникающая из задания сферы как топологического фактора $S^n = \Delta^n / \partial\Delta^n$ стандартного n-мерного симплекса по его границе[1], является геометрической реализацией $|X|$ предпучка $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого множество $X_k = X(k)$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\Delta([k], [n])$ отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $X(\varphi) : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [k] \to [n]$ в класс стрелки $\varphi \circ \zeta : [k] \to [n]$.

Упражнение 9.4. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 9.5 (предпучки сечений)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

[1] т. е. отождествлении всех точек границы в одну точку

- предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$, что[1] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

- беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

- дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все эти пучки являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

- постоянный предпучок S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

9.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2)$ левого умножения на φ: $\varphi_*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi$, и предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$ правого умножения на φ: $\varphi^*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ \varphi$.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k], [m])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subset U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subset U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 9.6 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_\Bbbk : \mathcal{V}ec_\Bbbk^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{V}ec_\Bbbk$ сопоставляет векторному пространству V в двойственное векторное пространство $h_\Bbbk(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

[1] это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею

Пример 9.7 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств, содержащих $\geqslant 2$ элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\mathrm{big}} \hookrightarrow \varDelta_{\mathrm{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \varDelta_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \nabla_{\mathrm{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \varDelta_{\mathrm{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{big}}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\varDelta_{\mathrm{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\nabla_{\mathrm{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений: $\varphi \leqslant \psi$, если $\varphi(x) \leqslant \leqslant \psi(x)$ для всех x. Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Z_2, [1]) \to \mathrm{Hom}(Z_1, [1])\,,\ \xi \mapsto \xi \circ \varphi\,.$

По-другому можно сказать, что оба дуализирующих предпучка $h_{[1]}$ сопоставляют конечному упорядоченному множеству Z множество его «дедекиндовых сечений»: множество X^* для $X \in \mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{big}}$ это множество *всех*[2] таких разбиений $X = X_0 \sqcup X_1$, что $x_0 < x_1$ для всех $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Аналогично, множество Y^* для $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ это множество всех *собственных*[3] разбиений $Y = Y_0 \sqcup Y_1$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

9.3. Категория функторов. Для произвольной пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ занумерованное объектами $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$ называется *естественным*[4] преобразованием функтора F в функтор G, если для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма морфизмов

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(Y) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{9-9}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это $K[\mathcal{C}]$-линейный гомоморфизм между этими модулями.

[1] отметим, что минимальный и максимальный элементы различны
[2] включая несобственные разбиения, в которых одно из подмножеств X_i пустое
[3] т. е. таких, что оба $Y_i \neq \varnothing$
[4] или *функториальным*

Определение 9.1

Категория функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ имеет в качестве объектов функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а в качестве морфизмов — естественные преобразования $f : F \to G$. Категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{D})$ мы будем обозначать $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$.

Упражнение 9.5. Проверьте, что описанное в n° 9.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

9.3.1. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF изоморфна в категории $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ в категории $\mathcal{F}un(\mathcal{D}, \mathcal{D})$. Эти функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что изоморфизм в категории функторов не предполагает *равенств* $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а означает лишь, что между между разными, вообще говоря, объектами $GF(X) \neq X$ имеется естественный по X изоморфизм $GF(X) \xrightarrow{\sim} X$, и аналогично для композиции FG.

Пример 9.8 (выбор базиса)

Обозначим через $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом конечномерном пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)}, \tag{9-10}$$

причём для всех координатных пространств $\Bbbk^n$ положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : \mathcal{V}ec \to \mathcal{C}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{V}ec$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Противоположная композиция $GF : \mathcal{V}ec \to \mathcal{V}ec$ принимает значения в несопоставимой с $\mathcal{V}ec$ по мощности малой подкатегории $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}ec$. Однако изоморфизмы (9-10) задают естественное преобразование из $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}$ в FG, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (9-9)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)
\end{tikzcd}$$

коммутативны. Тем самым, $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec} \simeq FG$ в категории $\mathcal{F}un(\mathcal{V}ec, \mathcal{V}ec)$.

[1] выбранный в V базис является прообразом стандартного базиса в $\Bbbk^n$ при этом изоморфизме

[2] а не изоморфизм функторов

Упражнение 9.6. При помощи изоморфизмов (9-3) покажите, что категория Δ_{big} эквивалентна[1] своей малой полной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$.

Лемма 9.1
Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[2] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём когда $Y = G(X(Y))$, мы положим $f_{G(X)} = \operatorname{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[3] $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 9.7. Покажите, что функторы дуализации из прим. 9.6 и прим. 9.7 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

9.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ называется *представимым*, если он изоморфен в категории $p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ предпучку h_X для некоторого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, который называют в этом случае *представляющим объектом* предпучка F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он изоморфен в категории $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$ функтору вида h^X. Такой $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ называется *копредставляющим объектом* функтора F.

Упражнение 9.8. Убедитесь, что тензорное произведение $U \otimes V$ векторных пространств U и V копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий каждому векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_{\text{s}}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных*[4] отображений из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса в X , т. е. как $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_{\text{s}})}\left(h_{[n]}, X\right)$. Обобщением этого наблюдения является

[1] причём в отличие от предыдущего прим. 9.8 эта эквивалентность является *канонической*

[2] т. е. все отображения $G : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами

[3] поскольку $G : \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна

[4] т. е. согласованных с триангуляциями

Лемма 9.2 (лемма Ионеды)
Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \operatorname{Hom}(X, A) \to F(X)\,, \tag{9-11}$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \to A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (9-11) значение отображения $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\operatorname{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (9-11), любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (9-9)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \operatorname{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \operatorname{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{9-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\operatorname{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\operatorname{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает естественное преобразование f, задаваемое требованием коммутативности диаграмм (9-12) для всех $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Функториальность диаграммы (9-12) по A и F очевидна. □

Упражнение 9.9. Сформулируйте и докажите двойственную версию леммы Ионеды, обслуживающую предпучок $A \mapsto h^A$ копредставимых функторов на $\mathcal{C}$ и ковариантные функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$.

Следствие 9.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизмы $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, h^B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

9.4.1. Описание объектов «универсальными свойствами». Неформально говоря, сл. 9.1 означает, что если функтор F представим, то его представляющий объект единствен с точностью до канонического изоморфизма. Это позволяет переносить теоретико множественные конструкции из категории $\mathcal{S}et$ в произвольные категории: результатом определяемой теоретико множественной операции над набором объектов $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ объявляется объект $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, который представляет функтор $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящий $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения рассматриваемой операции к множествам $\operatorname{Hom}(Y, X_i)$. Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта — соответствующий функтор запросто может оказаться непредставимым. Но если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически будет обладать некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, будет единственен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства.

Пример 9.9 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий функтор $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$ из $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathcal{S}et$. Если он существует, то для всех Y имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$, изображающих элемент $\beta_{A\times B}(\operatorname{Id}_{A\times B}) \in \operatorname{Hom}(A\times B, A)\times\operatorname{Hom}(A\times B, B)$. Она универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B$ существует единственная такая стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, что $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 9.10. Убедитесь, что для каждой диаграммы $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$, также обладающей этим универсальным свойством, имеется единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$.

Пример 9.10 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор $Y \mapsto \operatorname{Hom}(A, Y)\times\operatorname{Hom}(B, Y)$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathcal{C}$ имеется единственный такой морфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to Y$, что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_B$.

Упражнение 9.11. Убедитесь, что если универсальная тройка $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$ существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с отображениями $i_{A,B}$, и покажите, что в категориях множеств и топологических пространств произведения и копроизведения суть прямые[1] произведения и дизъюнктные объединения соответственно; в категории всех групп — это прямые и свободные[2] произведения; в категории коммутативных колец с единицей и модулей над фиксированным коммутативным кольцом с единицей — это прямые и тензорные произведения.

[1] теоретико множественные и топологические

[2] например, свободное произведение двух экземпляров группы $\mathbb{Z}$ — это свободная (некоммутативная) группа $\mathbb{F}_2$ с двумя образующими

9.5. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \tag{9-13}$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* к F. С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$\lambda : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \varrho : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F\,. \tag{9-14}$$

Стрелка $\lambda_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования λ над $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, является образом элемента $\operatorname{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (9-13), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \operatorname{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $\varrho_X : X \to GF(X)Y$ получается из $\operatorname{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (9-13), написанном для $Y = F(X)$:

$$\operatorname{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Пример 9.11 (свободные модули)
Обозначим через $A\text{-}\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом A, а через $G : A\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, сопоставляющий модулю множество его элементов. Для любого множества $E \in \operatorname{Ob}\mathcal{S}et$ ковариантный функтор $A\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, заданный правилом $M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$, копредставим свободным A-модулем $A \otimes E$ с базисом E, образованным всеми конечными формальными линейными комбинациями $\sum_i a_i e_i$ элементов множества E с коэффициентами из A.

Упражнение 9.12. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{A\text{-}\mathcal{M}od}(A \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)\,.$$

Из упражнения вытекает, что функтор $E \mapsto E \otimes K$ сопоставляющий множеству E свободный левый A-модуль с базисом E, является левым сопряжённым к забывающему функтору G. Естественное преобразование $\varrho_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$ вкладывает E в качестве базиса в свободный модуль $A \otimes E$, а естественное преобразование $\lambda_M : M \hookrightarrow A \otimes G(M)$ A-линейно вкладывает M в качестве базиса в огромный свободный свободный A-модуль с базисом M. Например, при $M = A = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем.

Пример 9.12 (индуцирование и коиндуцирование)
Для всякого расширения $A \subset B$ ассоциативных $\Bbbk$-алгебр с единицами описанный в n° 7.3 на стр. 92 *функтор индуцирования* $\operatorname{ind} : A\text{-}\mathcal{M}od \to B\text{-}\mathcal{M}od$, $V \mapsto B \underset{A}{\otimes} V$, является левым сопряжённым, а описанный в n° 7.3.3 на стр. 96 *функтор коиндуцирования* $\operatorname{coind} : A\text{-}\mathcal{M}od \to B\text{-}\mathcal{M}od$, $V \mapsto \operatorname{Hom}_A(B, V)$ — правым сопряжённым к *функтору ограничения* $\operatorname{res} : B\text{-}\mathcal{M}od \to A\text{-}\mathcal{M}od$, ибо в *loc. cit.* мы построили функториальные по A-модулю V и B-модулю W изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}_B(B \underset{A}{\otimes} V, W) \simeq \operatorname{Hom}_A(V, W) \quad \text{и} \quad \operatorname{Hom}_A(W, V) \simeq \operatorname{Hom}_B(W, \operatorname{Hom}_A(B, V))\,.$$

Упражнение 9.13. Вспомните, как они задаются, и убедитесь в их естественности по V и W.

Предложение 9.1
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{9-15}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор (9-15) представляется объектом $F(X)$, т. е. в $\mathcal{F}un(\mathcal{D})$ имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h_G^X$ от Y. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h_G^{X_2} \to h_G^{X_1}$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. По сл. 9.1 из леммы Ионеды композиция естественных преобразований $\left(f^{X_1}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Упражнение 9.14. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ был представим предпучок $h_Y^G : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и в таком случае $G(X)$ представляет этот предпучок.

Упражнение 9.15. Свяжем с топологическим пространством $\mathcal{X}$ симплициальное множество[1] $S(\mathcal{X}) : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, сопоставляющее симплексу $[n] \in \operatorname{Ob}\Delta$ множество $S_n(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, \mathcal{X})$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathcal{X}$, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $|\varphi|^* : f \mapsto f \circ |\varphi|$ на аффинное отображение $|\varphi| : \Delta^m \to \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Покажите, что определённый таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ является правым сопряжённым к функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, который сопоставляет симплициальному множеству $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ топологическое пространство $|X|$ склеенное из симплексов $\bigsqcup_n \bigsqcup_{x \in X([n])} \Delta_x^n$ по правилам, описанным в прим. 9.3 и прим. 9.4 на стр. 116 – 117.

9.6. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Всякий функтор $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ даёт реализацию такой диаграммы в категории $\mathcal{C}$, т. е. является диаграммой в категории $\mathcal{C}$ с вершинами в объектах $X_\nu = X(\nu)$, занумерованных множеством $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$, и стрелками $X(\mu \to \nu) : X_\mu \to X_\nu$, занумерованными множеством $\operatorname{Mor}\mathcal{N}$. Так, каждый объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{C}$, в которой все объекты $\overline{C}_\nu = C$ и все стрелки равны Id_C. С любой диаграммой

[1] оно называется множеством *сингулярных симплексов* пространства cX

$X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{C}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что имеется естественный по $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{C}, X), \tag{9-16}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[1] диаграммы X и пишут $L = \varprojlim X_\nu$. Двойственным образом, объект $L' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{C})$, называется *копределом*[2] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $L' = \varinjlim X_\nu$. В этом случае имеется функториальная по $C \in \mathcal{C}$ биекция $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L', C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{C})$.

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». А именно, полагая $C = L$ в формуле (9-16), можно сопоставить тождественному эндоморфизму Id_L предела $L = \varprojlim X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ естественное преобразование $f : \overline{L} \to X$, представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : L \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\alpha : Y \to \varprojlim X_\nu$, что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, для копредела $\varinjlim X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеется канонический набор стрелок $\iota_\nu : X_\nu \to \varinjlim X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, такой что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : X_\nu \to Y$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\beta : \varinjlim X_\nu \to Y$, что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 9.16. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 9.13 (начальный и конечный объекты)
Простейшей диаграммой является пустая категория $\mathcal{N} = \varnothing$. Поскольку из пустого множества имеется ровно одно отображение в любой класс, $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ — это одноэлементное множество, «пустая диаграмма». Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ каждое из множеств $\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Fin})$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Or}, X)$ состоит ровно из одного элемента.

Упражнение 9.17. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

[1] пределы иногда также называют *обратными* или *проективными пределами*
[2] копределы иногда также называют *прямыми* или *инъективными пределами*

Пример 9.14 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно $\prod\limits_\nu X_\nu$ и $\coprod\limits_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения пары объектов, уже обсуждавшиеся нами в прим. 9.9 и прим. 9.10. Очевидная индукция показывает, что для существования любых конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых пар объектов.

Пример 9.15 ((ко) уравнители)
Пусть $\mathcal{N} = \{\bullet \rightrightarrows \bullet\}$ состоит из двух объектов и имеет ровно два нетождественных морфизма между ними[1]. Реализация такой диаграммы в категории $\mathcal{C}$ представляет собой пару стрелок $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$, и её (ко) предел называется *(ко) уравнителем*[2] стрелок φ и ψ. В категории множеств уранитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$ Коуравнитель представляет собою фактор множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[3] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$.

Упражнение 9.18. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «образующих и соотношений».

Пример 9.16 (послойные произведения)
Предел диаграммы вида $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ называется *послойным*[4] *произведением*. Конкретная реализация такой диаграммы выглядит как $X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$, и её предел обозначается

[1] так что всего $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$ состоит из 4 элементов

[2] по-английски (*co*)*equalizer*

[3] Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности, и всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

[4] или *расслоенным*

$X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{9-17}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 9.19. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (9-17) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Пример 9.17 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \underset{B}{\otimes} Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \underset{B}{\otimes} Y \end{tikzcd}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \underset{B}{\otimes} Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 9.20. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

[1] в теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*

9.6.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется (*ко*) *замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$.

Предложение 9.2
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Для произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ образуем прямое произведение $A = \prod_\nu X_\nu$ объектов диаграммы, в которое все объекты входят по одному разу, и прямое произведение $B = \prod_{\mu\to\nu} X_{\mu\to\nu}$, сомножители в котором нумеруются стрелками из $\mathcal{N}$ и $X_{\mu\to\nu} = X_\nu$, т. е. каждый объект X_ν диаграммы входит в B столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждого $\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ обозначим через

$$\alpha_\nu : X_\nu \to B'_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \prod_\mu X_{\mu\to\nu}$$

произведение тождественных морфизмов $\operatorname{Id}_{X_\nu} : X_\nu \to X_{\mu\to\nu} = X_\nu$, взятое по всем стрелкам с концом в ν, и для каждого $\mu \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ обозначим через

$$\beta_\mu : X_\mu \to B''_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \prod_\nu X_{\mu\to\nu}$$

произведение морфизмов $X(\mu \to \nu) : X_\mu \to X_{\mu\to\nu} = X_\nu$, взятое по всем стрелкам с началом в μ. Поскольку $B = \prod_\nu B'_\nu = \prod_\mu B''_\mu$ наборы стрелок

$$\alpha_\nu \circ \pi_\nu : A \to B_\nu \quad \text{и} \quad \beta_\mu \circ \pi_\mu : A \to B_\mu ,$$

где $\pi_\eta : A \to X_\eta$ означает проекцию произведения на η-й сомножитель, задают пару морфизмов $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} B$, уравнитель которых и является пределом диаграммы X. Случай копределов разбирается аналогично. □

Упражнение 9.21. Проверьте, что уравнитель стрелок α и β действительно является пределом диаграммы X, а также проведите доказательство достаточного условия козамкнутости.

Замечание 9.1. Для того, чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 9.2 достаточно требовать существования в $\mathcal{C}$ только конечных (ко) произведений.

Следствие 9.2
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 9.18. □

Пример 9.18 (пределы направленностей)
Будем называть диаграмму $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, индексирующая категория $\mathcal{N}$ которой является чумом, рассматриваемым как категория[1], чумовой *диаграммой*. В категории $\mathcal{S}et$ копредел чумовой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$ допускает следующее описание. Назовём *хвостом* диаграммы X любое семейство элементов $x_\nu \in X_\nu$, в котором вместе с каждым представленным в нём индексом ν представлены и все индексы $\mu > \nu$ и при $\nu < \mu$ для любых x_ν, x_μ из семейства $X(\nu \to \mu)\, x_\nu = x_\mu$. Назовём хвосты $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ *эквивалентными*, если для любых их элементов x_α и y_β существует такой индекс $\gamma > \alpha, \beta$, что $X(\alpha \to \gamma)\, x_\alpha = X(\beta \to \gamma)\, y_\beta$.

Упражнение 9.22. Убедитесь, что это действительно отношение эквивалентности, что множество классов эквивалентных хвостов изоморфно $\varinjlim X$, и дайте двойственное описание пределов направленностей в $\mathcal{S}et$.

В анализе и топологии особенно популярны чумы $\mathcal{N}$, в которых $\forall\, \mu, \nu\; \exists\, \varkappa \geqslant \mu, \nu$. Такие чумы иногда называют *направленностями*. Соответствующие им ковариантные диаграммы $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ называются *прямыми*[2] системами, а контравариантные диаграммы $\mathcal{N}^{\text{opp}} \to \mathcal{C}$ — *обратными*[3] системами. Так, любой замкнутый относительно пересечений набор открытых множеств образует обратную систему в категории $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств данного топологического пространства X. Примером такой системы является набор открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$.

Упражнение 9.23. Удостоверьтесь, что у этой обратной системы есть копредел — объединение всех открытых множеств системы, и выясните, как устроены в $\mathcal{U}(X)$ послойное произведение $U \underset{X}{\times} V$ и послойное копроизведение $U \underset{\varnothing}{\otimes} V$.

Ещё пример: конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$.

Пример 9.19 (локализация коммутативного кольца)
Рассмотрим любую не содержащую нуля мультипликативную систему[4] S в произвольном коммутативном кольце K с единицей. Зададим на S структуру категории, полагая $\text{Hom}_S(s, t) \overset{\text{def}}{=} \{a \in K \mid as = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od_K$ из этой категории в категорию K-модулей, посылая каждый объект $s \in S$ в свободный K-модуль ранга один с образующей, которую мы обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а каждую стрелку $a \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм, переводящий базисный элемент $\left[\frac{1}{s_1}\right]$ в $a \cdot \left[\frac{1}{s_2}\right]$.

[1] см. n° 9.1 на стр. 113
[2] или *индуктивными*
[3] или *проективными*
[4] напомню, что это означает, что $1 \in S$ и $s, t \in S \Rightarrow st \in S$

Упражнение 9.24. Покажите, что копредел получившейся диаграммы в категории $\mathcal{M}od_K$ существует и изоморфен локализации[1] KS^{-1}.

9.6.2. Функториальность (ко) пределов. Пусть диаграммы

$$X : \mathcal{N} \to \mathcal{C} \quad \text{и} \quad Y : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$$

имеют в категории $\mathcal{C}$ копределы $N = \varinjlim X_\nu$ и $M = \varinjlim Y_\mu$. Тогда для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \to Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\varphi : N \to M$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r] \arrow[d, "f_\nu"'] & N \arrow[d, "\varphi"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r] & M , \end{tikzcd} \tag{9-18}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы элементов диаграммы в копредел. В самом деле, композиция канонических вложений $\iota_\mu : Y_\mu \to \varinjlim M$ со стрелками $f_\nu : X_\nu \to Y_{\tau(\nu)}$ задаёт систему морфизмов $\psi_\nu : X_\nu \to M$, перестановочных со стрелками диаграммы X, и по универсальному свойству копредела имеется единственный морфизм $\varphi : N \to M$, делающий все диаграммы (9-18) коммутативными.

Упражнение 9.25. Пусть в категории $\mathcal{C}$ есть пределы $N = \varprojlim X_\nu$ и $M = \varprojlim Y_\mu$. Покажите, что для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : Y \circ \tau \to X$ существует единственный морфизм $\varphi : M \to N$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] & X_\nu \\ M \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & Y_{\tau(\nu)} , \arrow[u, "f_\nu"'] \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в вершины диаграммы.

Определение 9.2 (перестановочность с (ко) пределами)
Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 9.3
Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — пределами.

[1]т. е. модулю дробей a/s с $a \in K$, $s \in S$, где под дробью понимается класс эквивалентности пары a/s по отношению $a_1/s_1 \sim a_2/s_2$, означающему, что $\exists\, s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$

Доказательство. Из сопряжённости F и G вытекает существование для любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ естественного по $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфизма функторов $\mathcal{D} \to \mathcal{S}et$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) .$$

Упражнение 9.26. Убедитесь в этом.

Поэтому для $L = \varinjlim X_\nu$ имеются следующие изоморфизмы функторов $\mathcal{D} \to \mathcal{S}et$:

$$\begin{aligned} h^{F(L)}(D) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(L), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(L, G(D)\big) \simeq \\ \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right) . \end{aligned}$$

Тем самым, $F(L) \simeq \varinjlim F \circ X$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Упражнение 9.27. Проведите это рассуждение.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Из единственности подъёма полилинейной формы $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to \Bbbk$ до линейной формы $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \to \Bbbk$ вытекает, что единственная линейная форма $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \to \Bbbk$, обращающая в нуль на всех разложимых тензорах, это нулевая форма. Поэтому разложимые тензоры не содержатся ни в каком собственном подпространстве.

Упр. 1.3. Образ оператора $F : U \to W$ ранга 1 одномерен и натянут на некий ненулевой вектор w, единственный с точностью до пропорциональности. Значение F на произвольном векторе $u \in U$ равно $F(u) = \xi(u) \cdot w$, где $\xi \in U^*$ отличен от нуля и лежит в одномерном подпространстве $\operatorname{Ann} \ker F$.

Упр. 1.4. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как и между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Т. к. всякая прямая, лежащая на квадрике Сегре и проходящая через заданную точку p содержится в конике, которая высекается из квадрики Сегре касательной плоскостью в точке p и полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p образов координатных прямых с $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упр. 1.5. Модуль билинейных отображений $\mathbb{Z} \times A \to W$ изоморфен $\operatorname{Hom}(A, W)$. Изоморфизм задаётся сопоставлением билинейному отображению φ его ограничения на $1 \times A$.

Упр. 1.6. Достаточно убедиться в том, что все разложимые тензоры $w \otimes v \in W \otimes V$ лежат в образе $f \otimes \mathrm{Id}_V$, а это очевидно.

Упр. 2.1. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \dots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \dots \cdot \varphi(v_n) \in A$ полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $V^{\otimes n} \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $TV \to A$, продолжающий f, причём всякий гомоморфизм $TV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ в $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \dots \cdot \varphi(v_n) \in A$, и стало быть, должен совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 6.

Упр. 2.2. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$i_v \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и по φ, достаточно проверять её для форм φ, переводимых изоморфизмом из сл. 2.1 в разложимые тензоры $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n$.

Упр. 2.3. Для любых v, w имеем

$$0 = \varphi(\dots, (v+w), \dots, (v+w), \dots) = \varphi(\dots, v, \dots, w, \dots) + \varphi(\dots, w, \dots, v, \dots)$$

Наоборот, равенство $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots)$ влечёт при $1 \neq -1$ равенство $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$.

Упр. 2.4. Годятся дословно те же формальные соображения, что и в доказательстве лем. 1.1 на стр. 6.

Упр. 2.5. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$, или число решений уравнения $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, m_2, \dots, m_d$.

Упр. 2.6. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \dots \times V \to A,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\prod \varphi(v_i)$ в A полилинейно и симметрично, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $S^n V \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $SV \to A$, продолжающий f. Наоборот, любой гомоморфизм $SV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор $\prod v_i \in S^n V$ в $\prod \varphi(v_i) \in A$, и стало быть, будет совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 6.

Упр. 2.7. Первое вытекает из равенства $0 = (v+w) \otimes (v+w) = v \otimes w + w \otimes v$, второе — из того, что равенство $v \otimes v + v \otimes v = 0$ при $1 + 1 \neq 0$ влечёт равенство $v \otimes v = 0$.

Упр. 2.8. Модифицируйте доказательство предл. 2.2 на стр. 20.

Упр. 2.9. Для $t \in V^{\otimes n}$ и $g \in S_n$ обозначим через $g(t)$ результат действия g на t перестановкой тензорных сомножителей, как в (2-17). Утверждения (а) и (б) вытекают из того, что для каждого $h \in S_n$ выполняются равенства

$$h\Big(\sum_{g \in S_n} g(t)\Big) = \sum_{g \in S_n} hg(t) = \sum_{g' \in S_n} g'(t)$$
$$h\Big(\sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot g(t)\Big) = \operatorname{sgn}(h) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(hg) \cdot hg(t) = \operatorname{sgn}(h) \cdot \sum_{g' \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot g'(t)$$

(ибо отображение $g \mapsto g' = hg$ взаимно однозначно), мы заключаем, что

$$h(\operatorname{sym}_n(t)) = \operatorname{sym}_n(t) \quad \text{и} \quad h(\operatorname{alt}_n(t)) = \operatorname{sgn}(h) \cdot \operatorname{alt}_n(t).$$

Утверждения (в) и (г) очевидны (обе суммы состоят из $n!$ одинаковых слагаемых). В (д) суммы по чётным и по нечётным перестановкам будут состоять из одних и тех же (и одинаковых внутри каждой из сумм) слагаемых, отличающихся знаком.

Упр. 2.10. Первое утверждение в пункте (а) проверяется прямым вычислением. Что касается второго, то из равенства $\operatorname{sym}_3 + \operatorname{alt}_3 + p = E$ вытекает, что образы $\operatorname{im}(\operatorname{sym}_3) = \operatorname{Sym}^3(V)$, $\operatorname{im}(\operatorname{alt}_3) = \operatorname{Skew}^3(V)$ и $\operatorname{im}(p)$ линейно порождают $V^{\otimes 3}$, поскольку любой $t \in V^{\otimes 3}$ представляется как $t = E(t) = \operatorname{sym}_3(t) + \operatorname{alt}_3(t) + p(t)$. Эта сумма прямая в силу того, что, с одной стороны, каждый из трёх операторов являются проектором и действует на своём образе тождественно, а с другой стороны, аннулирует образы двух оставшихся операторов в следствие равенств $p \circ \operatorname{alt}_3 = \operatorname{alt}_3 \circ p = p \circ \operatorname{sym}_3 = \operatorname{sym}_3 \circ p = 0$ и равенств $\operatorname{sym}_3 \circ \operatorname{alt}_3 = \operatorname{alt}_3 \circ \operatorname{sym}_3 = 0$, вытекающих из упр. 2.9. Например, если

$t \in \operatorname{im}(p) \cap \big(\operatorname{im}(\mathrm{sym}_3) + \operatorname{im}(\mathrm{alt}_3)\big)$, то $t = p(t)$, а записывая t как $\mathrm{sym}_3(t_1) + \mathrm{alt}_3(t_2)$, получим $p(t) = 0$, откуда $t = 0$.

Утверждение пункта (б) равносильно тому, что $\operatorname{im}(p) \subset V^{\otimes 3}$ является аннулятором образа оператора $\mathrm{Id} + T + T^2 : V^{*\otimes 3} \to V^{*\otimes 3}$:

$$\operatorname{im}(p) = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \big\langle (\mathrm{Id} + T + T^2)\xi\,,\, t \big\rangle = 0\ \forall\, \xi \in V^{*\otimes 3}\},$$

где $\langle\, *\,,\, *\,\rangle$ означает полную свёртку между $V^{*\otimes 3}$ и $V^{\otimes 3}$. Легко видеть, что для любых $g \in S_n$, $\xi \in V^{*\otimes n}$, $t \in V^{\otimes n}$ выполняется равенство $\langle\, g\xi\,,\, t\,\rangle = \big\langle\, \xi\,,\, g^{-1}t\,\big\rangle$. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что образ p совпадает с ядром оператора

$$\mathrm{Id}^{-1} + T^{-1} + T^{-2} = \mathrm{Id} + T^2 + T = 3(\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3),$$

действующего на $V^{\otimes 3}$. Но из решения упр. 2.10 (а) видно, что $\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3$ — это проектор $V^{\otimes 3}$ на подпространство $\mathrm{Sym}^3 V \oplus \mathrm{Skew}^3 V$ вдоль подпространства $\operatorname{im}(p)$.

Упр. 2.11. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе S_n состоит из

$$m_1!\, m_2! \cdots m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.13. Поскольку утверждение линейно по v, f и g достаточно проверить его для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$, что делается прямо по определению.

Упр. 2.14. Это следует из равенства $\tilde{f}(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n} \cdot \partial_v f(x)$, где $n = \deg f$.

Упр. 2.16. Это аналогично упр. 2.13.

Упр. 2.17. Фиксируем в U базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем, e_i. Тогда $e_i \wedge \omega \neq 0$, поскольку будет содержать ненулевой моном $e_{i \sqcup I}$, возникающий только из произведения e_i на e_I и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m$ и $e_i \wedge \omega = 0\ \forall\, i$, а значит, $u \wedge \omega = 0\ \ \forall\, u \in U$.

Упр. 3.3. Поскольку Δ_δ обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$. Так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Сравнивая лексикографически старшие мономы в этом произведении и в Δ_δ, заключаем, что частное равно 1.

Упр. 3.4. Разложим перестановку g циклового типа λ в произведение независимых циклов и запишем их по строкам диаграммы так, чтобы действие перестановки g циклически сдвигало все элементы вдоль строк на единицу влево. Сопряжение перестановки g перестановкой h состоит в замене содержимого клеток диаграммы по правилу $i \mapsto h(i)$. Стабилизатор g состоит из всех перестановок, независимо циклически сдвигающих номера вдоль строк и переставляющих строки одинаковой длины между собою как единое целое.

Упр. 3.5. В правом нижнем углу матрицы $\big(h_{\lambda_i + j - i}\big)$, начиная с позиции $(m+1, m+1)$, где m — высота диаграммы λ, будет стоять верхняя унитреугольная матрица, левее которой все элементы в строках будут нулевые.

Упр. 4.1. Устойчивое паросочетание между i-тым и $(i+1)$-м солбцом устанавливается так: последовательно перебираем шарики в $(i+1)$-ом столбце двигаясь снизу вверх и назначаем очередному шарику ***ш*** партнёром самый верхний шар i-того столбца, лежащий строго ниже ***ш*** и ещё не назначенный никому партнёром, а если таких шаров нет, объявляем ***ш*** свободным. После того, как все шары $(i+1)$-го столбца разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары i-того столбца, не являющиеся ни чьими партнёрами, тоже объявляются свободными. Операция L_i перемещает на одну клетку влево самый верхний свободный шар $(i+1)$-го столбца или ничего не делает, если свободных шаров в $(i+1)$-ом столбце нет. Операция R_i перемещает на одну клетку вправо самый нижний свободный шар i-го столбца или ничего не делает, если в i-ом столбце нет свободных шаров.

Упр. 4.3. Диаграммы $\ydiagram{4,1,1}$ и $\ydiagram{3,3}$ несравнимы по отношению $\trianglerighteq$.

Упр. 4.4. $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)} = s_{(2,1)} + s_{(1,1,1)} = s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$

Упр. 4.5. При вычислении $s_\lambda \cdot e_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток без повторений заполненных числами от 1 до k, и если 2 из них попадают в одну строку, то возникает противоречие либо с табличным ограничением, либо с ограничением Ямануччи. При вычислении $s_\lambda \cdot h_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток заполненных единицами, никакие две из которых не могут попасть в один столбец в силу табличного ограничения.

Упр. 5.2. При $m \geqslant 2$ классы многочленов, делящихся на p, составляют собственный подмодуль в $\Bbbk[t]/\left(p^m\right)$. При $m = 1$ фактор кольцо $\Bbbk[t]/(p)$ является полем, т. е. для любого ненулевого класса $[g] \in \Bbbk[t]/(p)$ существует такой многочлен $h \in \Bbbk[t]$, что $h\cdot[g] = [1]$. Поэтому любой класс $[f] \in \Bbbk[t]/(p)$ получается из класса $[g]$ применением оператора $h(t) \cdot f(t)$.

Упр. 5.3. Диагональный оператор с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ аннулируется многочленом $\prod(t-\lambda_i)$. Наоборот, поскольку многочлен, аннулирующий модуль (5-4), делится на максимальную степень каждого элементарного делителя, все элементарные делители имеют вид $t-\lambda$ и входят в разложение (5-4) только в первых степенях, что и означает диагонализуемость оператора умножения на t.

Упр. 5.4. Включения $R \ker f \subset \ker f$ и $R \operatorname{im} f \subset \operatorname{im} f$ проверяются так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$; если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$.

Упр. 5.7. Для любых векторов $v, w \in V$ рассмотрим произвольный оператор $\varphi : V \to V$ переводящий v в w. Так как $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ с $\lambda_i \in \Bbbk$ и $f_i \in R$, вектор $w = \varphi(v) = \sum \lambda_i f_i(w)$ лежит в линейной оболочке R-орбиты вектора v.

Упр. 5.10. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ, его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^* \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto \varrho(g^{-1})^* \xi \otimes \lambda(g) w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw) .$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g\left(\xi(g^{-1}u) \cdot w\right) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

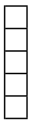
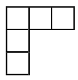
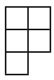
Упр. 5.22. Достаточно показать, что никакая ненулевая линейная форма $\varphi \in \operatorname{Sym}^n(W)^*$ не зануляется на всех тензорах $w^{\otimes n}$. Зафиксируем в W базис $e_1, e_2, \dots, e_d$. Пусть $w = \sum x_i e_i$, а φ переводит стандартный базисный вектор $e_{[m_1 m_2 \dots m_d]} \in \operatorname{Sym}^n(W)$ в число $a_{m_1 m_2 \dots m_d} \in \Bbbk$. Тогда $\varphi\left(w^{\otimes n}\right) = \sum\limits_{m_1 m_2 \dots m_d} a_{m_1 m_2 \dots m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$. Над бесконечным полем $\Bbbk$ такой многочлен тогда и только тогда является тождественно нулевой функцией от $x_1, x_2, \dots, x_n$, когда все его коэффициенты $a_{m_1 m_2 \dots m_d} = 0$.

Упр. 6.5. Первое утверждение является следствием тождества Якоби, второе достаточно проверять на разложимых тензорах.

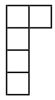
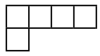
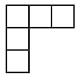
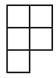
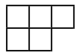
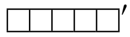
Упр. 6.6. Прямая $t \mapsto E + tA$ касается квадрики $\det X = 1$ в точке E тогда и только тогда квадратный трёхчлен $\det(E + tA) - 1 = \det(A) \cdot t^2 + \mathrm{tr}(A) \cdot t$ имеет кратный корень в нуле.

Упр. 6.8. Если $V = \Bbbk \cdot e_1 \oplus \Bbbk \cdot e_2 \oplus \cdots \oplus \Bbbk \cdot e_n$, то $\overline{\Bbbk} \otimes V \simeq \overline{\Bbbk} \cdot e_1 \oplus \overline{\Bbbk} \cdot e_2 \oplus \cdots \oplus \overline{\Bbbk} \cdot e_n$ в силу канонического изоморфизма дистрибутивности из предл. 1.3 на стр. 13.

Упр. 7.7. Группа $\mathfrak{A}_5$ имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом $\mathfrak{A}_5$, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров $\mathfrak{A}_5$ такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление Δ. Представления $\mathrm{sgn} \otimes \Delta$ и $\Lambda^2 \Delta$ тоже неприводимы, а 2-я симметрическая степень раскладывается как $S^2 \Delta = \mathrm{sgn} \oplus \Delta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое 5-мерное представление, которое геометрически описывается как действие $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$ на гармонических четвёрках точек[1] в $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$. Ответ:

классы							
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	−1	−1	1	1	−1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	−1	−1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	−2	0	1	0	1	−1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	−2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	−1	−1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	−1	1	−1	1	−1	0

Упр. 7.8. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m-той степени.

Упр. 7.10. Каноническое отображение B-модулей $B \underset{A}{\otimes} A \to B$, ассоциированное с вложением A-модулей $A \hookrightarrow B$, является изоморфизмом для любого расширения $A \subset B$ ассоциативных алгебр с единицами.

Упр. 7.14. Зафиксируем систему представителей $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ смежных классов G/H. Тогда $G = g_1 H \sqcup \ldots \sqcup g_r H = H g_1^{-1} \sqcup \ldots \sqcup H g_r^{-1}$, и каждый H-инвариантный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ однозначно задаётся указанием s векторов $v_\nu = \varphi\left(g_\nu^{-1}\right) \in V$ ибо действует на остальные базисные векторы по правилу $\varphi\left(h g_\nu^{-1}\right) = h v_\nu$. Поэтому

$$\dim \operatorname{Hom}_H(\Bbbk[G], V) = [G : H] \cdot \dim V = \dim \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V .$$

Преобразование Фурье от H-инвариантного оператора $\varphi : g_\nu^{-1} \mapsto v_\nu$ равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\nu} \sum_{h \in H} g_\nu h^{-1} \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} \varphi\left(h g_\nu^{-1}\right) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\nu} g_\nu v_\nu \in \bigoplus_{\nu} g_\nu V$$

и зануляется только когда все $v_\nu = 0$.

Упр. 8.5. Будем писать $T \underset{a}{\succ} U$, если $T \succ U$, и наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, равно a. Если $T \underset{a}{\succ} U$ и $U \underset{b}{\succ} W$, то $T \underset{a}{\succ} W$ при $a \geqslant b$ и $T \underset{b}{\succ} W$ при $a \leqslant b$.

Упр. 8.6. Для всех $q \in R_T$ и $p \in C_U$ выполнено строгое неравенство $pU \succ qT$. По лем. 8.1 существует транспозиция $\tau \in R_U \cap C_T$, и вычисление (8-12) показывает, что $c_T\{U\} = 0$.

[1]Точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если их двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$, т. е. в карте, где $a = \infty$, точка b является серединой отрезка cd. Поскольку каждая тройка точек однозначно дополняется до гармонической и одна и та же четвёрка происходит из 4 троек, в $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ имеется $\binom{6}{2}/4 = 5$ гармонических четвёрок точек, и действие на них группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ задаёт изоморфизм $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$.

Упр. 8.9. Вычисление аналогично вычислению определителя Вандермонда: в кольце многочленов $\mathbb{Z}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$ определитель делится на каждую из разностей $\eta_i - \eta_j$, а значит, и на $\prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. Сравнение лексикографически старших мономов показывает, что частное равно 1.

Упр. 8.10. Индукцией по количеству столбцов покажите, что произведение длин крюков любой диаграммы λ равно $\prod\limits_i \eta_i! / \prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$, где $\eta = \lambda + \delta$, и воспользуйтесь формулой Фробениуса. Индуктивный переход основан на том, что длины крюков клеток первого столбца равны $\eta_i - n + \ell$, где ℓ — число строк в диаграмме.

Упр. 9.17. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 9.20. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \rightarrow A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \bigotimes\limits_K B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с прим. 9.12). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \bigotimes\limits_K b_1) \cdot (a_2 \bigotimes\limits_K b_2) = (a_1 a_2) \bigotimes\limits_K (b_1 b_2)$ (убедитесь, что определение корректно и задаёт коммутативную ассоциативную K-билинейную операцию).

Упр. 9.25. Композиции стрелок $f_\nu : Y_{\tau(\nu)} \to X_\nu$ с каноническими проекциями $\pi_\mu : M \to Y_\mu$ предела на элементы диаграммы задаёт систему морфизмов $\psi_\nu : M \to X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X. По универсальному свойству пределов имеется единственный морфизм $\varphi : N \to M$, перестановочный со всеми имеющимися стрелками.