Алгебра 1 Листок 5 15 октября

Векторные пространства подразумеваются конечнопорожденными.

1) Пусть V – векторное пространство над полем k k. Функция χ на векторном пространстве V со значениями в k называется линейной (или ковектором или функционалом) если

$$\chi(u+v) = \chi(u) + \chi(v), \chi(\lambda u) = \lambda \chi(u).$$

а) Наделите множество V^* ковекторов структурой векторного пространства.

б) Сопоставте базису $\{e^i\}$ в V базис $\{\hat{e}_j\}$ в V^*. (подсказка: строку можно умножить на столбец а у вектора есть координаты в базисе)

3) а)Пусть V – векторное пространство, а $W \subset V$ – его подпространство. Докажите что любой базис $e^1, e^2, \cdots e^k$ подпространства W может быть дополнен до базиса $e^1, e^2, \cdots e^k, e^{k+1} \cdots e^n$ всего пространства V.

б) Докажите что образы $e^{k+1}, e^{k+2}, \cdots e^n$ в факторпространстве V/W образуют в нем базис.

в) $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$.

4)а) Пусть V и W – векторные пространства, а $L : V \to W$ – линейный оператор. Докажите что существуют базисы

$e^1, e^2, \cdots e^k, e^{k+1} \cdots e^{k+l}$ в V и $f^1, f^2, \cdots f^l, f^{l+1} \cdots e^{l+m}$ в W такие что $L(e^p) = 0, 1 \leq p \leq k$, $L(e^{k+q}) = f^q, 1 \leq q \leq m$.

б)(Теорема об индексе) Найдите и докажите формулу про размерности, следующую из пункта а).