Алгебра 1 2014 осень листок 1 10 сентября

1. Рассмотрим множество состоящее из двух элементов ч =(четный) и н=(нечетный) и определим на них операцию сложения двух элементов как четность суммы чисел соответствующих аргументам операции, так, ч+н=н, и аналогично произведение.

а) Докажите, что это коммутативное ассиациативное кольцо,

б) Найдите ноль и единицу этого кольца.

2 Рассмотрим множество цифр. Определим сумму и произведение как последнюю цифру суммы и произведения соответственно. Докажите, что это коммутативное ассиациативное кольцо и найдите ноль и единицу этого кольца.

3. Докажите, что многочлены над коммутативным ассиациативным кольцом образуют коммутативное ассиациативное кольцо, найдите ноль и единицу этого кольца.

4. Докажите что кольцо многочленов $R[X][Y]$ над кольцом многочленов $R[X]$ совпадает с кольцом многочленов от двух переменных $R[X,Y]$.

5. Определим гауссовы числа как совокупность выражения вида $r+it$ , $r$, $t$ – рациональные с операцией суммы $(r_1 + it_1) + (r_2 + it_2) = (r_1 + r_2) + i(s_1 + s_2)$ и произведения $(r_1 + it_1) + (r_2 + it_2) = r_1r_2 + i(r_1s_2 + s_1r_2) + i^2s_1s_2 = (r_1r_2 - s_1s_2) + i(r_1s_2 + is_1r_2)$. Иными словами, имееется дистрибьютивность и $i$ коммутирует с рациональными числами, обычно дистрибьютивность подразумевается, и говорят просто что соотношение есть $i^2 = -1$ Докажите, что гауссовы числа образуют поле.

6.(Кватернионы) Рассмотрим совокупность выражений вида $r + si + tj + uk$ с соотношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k, jk == kj = i, ki = -ik = j.$$

а) докажите, что если - $r, s, t, u$ – рациональные числа (а для тех, кто знает что это, вещественные числа) то получается тело (существует обратный элемент). Подсказка: рассмотрите элемент $r - si - tj - uk$ б) (Гурвиц) докажите, что если - $2r, 2s, 2t, 2u$ – целые числа и $\frac{1}{2}(r+s+t+u)$ – целое,то получается (некоммутативное) кольцо