Листок 3. 2 октября 2013

Задача 1. Рассмотрим три сингулярных одномерных симплекса (отображения отрезка $[0,1]$) на окружности, $a = \{t \mapsto e^{2\pi i t}\}$, $b = \{t \mapsto e^{\pi i t}\}$ и $c = \{t \mapsto e^{\pi i t + \pi}\}$. Найдите такую сингулярную 2-цепь d, что $\partial d = a + b - c$.

Задача 2. Вычислите гомологии с целыми коэффициентами и коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ для неориентируемых поверхностей.

Задача 3. Пусть для двух пар топологических пространств (или даже пар алгебраических комплексов) (X, Y) и (A, B) группы $H_i(X)$ изоморфны группам $H_i(A)$, и $H_i(Y)$ изоморфны группам $H_i(B)$ при всех целых i. Верно ли, что группы $H_i(X, Y)$ и $H_i(A, B)$ изоморфны?

Задача 4. Вычислите целочисленные гомологии и когомологии проективного пространства $\mathbb{R}P^n$.

Задача 5. Вычислите гомологии и когомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ для проективного пространства $\mathbb{R}P^n$.

Задача 6. Докажите, что любой конечномерный комплекс с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$ раскладывается в прямую сумму комплексов вида $0 \to \mathbb{F} \to \mathbb{F} \to 0$ (средняя стрелка – тождественное отображение) и $0 \to \mathbb{F} \to 0$.

Задача 7. Как связаны эйлеровы характеристики комплекса, подкомплекса и фактор-комплекса?

Задача 8. Докажите, что для связных клеточных комплексов первая группа гомологий совпадает с фактором фундаментальной группы по коммутанту.