Экзамен по группам и алгебрам Ли (6-20 декабря)

На пятёрку нужна хотя бы 1 задача со звёздочкой.

Задача 1. Пусть L – алгебра Ли, а K – такой идеал в ней, что алгебра L/K нильпотентна и при всех $x \in L$ нильпотентно отображение $\mathrm{ad} x_K$. Докажите, что алгебра L нильпотентна.

Задача 2. Пусть Φ – система корней, c – положительное вещественное число. Докажите, что если в Φ имеются корни, квадрат длины которых равен c, то все они составляют систему корней в натянутом на них подпространстве. Опишите, что происходит для случая системы корней B_n.

Задача 3. Рассмотрим двумерное пространство V, в котором естественно действует $\mathfrak{sl}(2)$. Разложите тензорное произведение двух представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ $S^4V^* \otimes S^8V^*$ в сумму неприводимых модулей.

Задача 4. Напомним, что симметрическая билинейная форма α на алгебре Ли называется ассоциативной, если $\alpha([x, y], z) = \alpha(x, [y, z])$. Для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ доказать, что если на ней есть две симметрические ассоциативные билинейные формы и они невырожденные, то они пропорциональны.

Задача 5. Пусть V и W – векторные пространства размерностей $n + 1$ и n над некоторым полем. Доказать, что $\mathfrak{gl}(W)$ изоморфна некоторой подалгебре в $\mathfrak{sl}(V)$.

Задача 6. Пусть $\mathfrak{g}$ – комплексная алгебра Ли, β – её форма Картана-Киллинга, $\mathfrak{g}_0$ – алгебра Ли, получающаяся из $\mathfrak{g}$ сужением поля скаляров до $\mathbb{R}$. Показать, что форма Картана-Киллинга алгебры $\mathfrak{g}_0$ равна удвоенной вещественной части формы β.

Задача 7. Покажите, что для того, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была редуктивной, необходимо и достаточно, чтобы её центр совпадал с наибольшим нильпотентным идеалом.

Задача 8. Постройте пример вещественной алгебры Ли и двух её несопряжённых картановских подалгебр.

Задача 9. Пусть G – вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – её алгебра Ли, $\varphi\colon \mathfrak{g} \mapsto G$ – дифференцируемое в 0 отображение, такое, что $T_0(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ и $\varphi(nx) = \varphi(x)^n$ для любых $x \in \mathfrak{g}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Покажите, что тогда $\varphi = \exp_G$.

Задача 10. Пусть X – нильпотентная матрица из $\mathfrak{gl}(n)$. Показать, что в $\mathfrak{gl}(n)$ найдутся две другие матрицы Y, H такие, что $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$, $[X, Y] = H$.

Задача 11. * Пусть $\mathfrak{g}$ – семимерное векторное пространство над $\Bbbk$ с базисом $\{e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 7\}$; знакопеременное коммутирование на $\mathfrak{g}$ задано формулами

$$[e_i, e_j] = \alpha_{ij} e_{i+j},\ i + j \leqslant 7,$$

а остальные коммутаторы нулевые.

a) Для того, чтобы выполнялось тождество Якоби, необходимо и достаточно, чтобы

$$-\alpha_{23}\alpha_{15} + \alpha_{13}\alpha_{24} = 0,$$
$$\alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{16} + \alpha_{14}\alpha_{25} = 0.$$

b) Вывести отсюда, что если $\Bbbk$ бесконечно, то существует бесконечно много попарно неизоморфных нильпотентных семимерных алгебр Ли над $\Bbbk$, и что существуют комплексные нильпотентные алгебры Ли, которые не получаются из вещественных алгебр Ли расширением поля скаляров $\mathbb{R}$ до $\mathbb{C}$.

Задача 12. * Пусть вещественная связная полупростая группа Ли обладает линейным непрерывным конечномерным представлением, которое инъективно. Доказать, что центр этой группы конечен.