8. Геометрия Галилея

Задача Дня. *Теорема Фейербаха в геометрии Галилея.* Проведем к параболе три касательные, через середины сторон образованного ими треугольника проведем параболу с осью, параллельной оси первой параболы. Тогда эти две параболы касаются.

Парабола задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — некоторые числа, т. е. является графиком квадратного трехчлена. Прямая $y = kx + r$ либо пересекает параболу в двух точках, либо пересекает в одной точке, либо не пересекает параболу. Если имеет место второй случай, прямая называется *касательной* к параболе в точке. Две параболы, имеющие в общей точке общую касательную, называются *касающимися*.

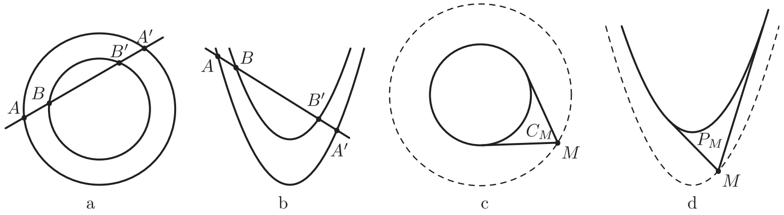

Рис. 2: Парабола как окружность

8.1. Даны парабола и точка A вне нее. Через A проведена прямая, пересекающая параболу в точках B и C. Докажите, что произведение длин проекций секущих AB и AC на ось Ox не зависит от выбора прямой.

8.2. a) Прямая пересекает две концентрические окружности в точках A, B, B', A'. Точки расположены на прямой в указанном порядке. (См. рис. 2a.) Тогда $AB = B'A'$.
b) Прямая пересекает две параболы, совмещающиеся сдвигом вдоль их общей оси, в точках A, B, B', A' в указанном порядке. (См. рис. 2b.) Тогда $AB = B'A'$.
c) Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.
d) Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.
e) Фигура C_M ограничена дугой окружности C и касательными к C, проведенными из точки M. (См. Рис. 2c.) Площадь C_M одинакова для всех точек M, лежащих на окружности, концентрической C.
f) Фигура P_M ограничена параболой P и касательными к P, проведенными из точки M. (См. Рис. 2d.) Площадь P_M одинакова для всех точек M, лежащих на параболе, полученной из P параллельным переносом вдоль оси.
g) Возьмем точки A и B вне окружности. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей окружность в точках M, N, построим окружность, описанную вокруг BNM. Либо все эти окружности имеют помимо B еще одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

h) Возьмем точки A и B вне параболы. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей параболу в точках M, N, построим параболу с осью, параллельной оси исходной параболы и проходящую через B, N, M. Либо все эти параболы имеют помимо B еще одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

8.3. a) Попытайтесь понять, что общего в приведенных выше задачах. Найдите примеры, аналогичные задаче 8.2, и докажите соответствующие утверждения. (Лучшие из найденных примеров будут представлены на разборе.)
b) Опишите наблюдаемое явление, т. е. сформулируйте как можно более широкий класс теорем, которые остаются верными после переформулировок, аналогичных тем, что сделаны в задаче 8.2 (“парабола” вместо “окружность”, “параболы, совмещающиеся параллельным переносом вдоль общей оси” вместо “концетрические окружности” и т. д.).
c) Объясните наблюдаемое явление, т. е. докажите, что истинность теорем об окружностях, которые являются ответом в пункте b), влечет истинность аналогов этих теорем о параболах.

Особые, или *вертикальные*, прямые — это прямые, параллельные оси Oy. *Горизонтальные* прямые — это прямые, параллельные оси Ox. *Инверсия 1-го рода* с центром S и радиусом r переводит каждую точку A, не лежащую на одной вертикальной прямой с точкой S, в такую точку A' на луче SA, что произведение длин проекций отрезков SA и SA' на ось Ox равно r^2. *Инверсией 2-го рода* относительно параболы $y = ax^2 + bx + c$ называется преобразование $(x, y) \mapsto (x, 2ax^2 + 2bx + 2c - y)$.

8.4. Любая биекция плоскости, переводящая параболы с вертикальными осями или прямые в параболы с вертикальными осями или прямые, является композицией инверсий относительно парабол, отражений и сжатий относительно вертикальных и горизонтальных прямых.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab2b,2.12abd,3.1ab2a,6.123a,7.12a–c	Акимова 1.12ab4,2.1,3.3a,4.123a4b,6.23a	Астафаев 1.1b∓c2a, 5.13a±b
Байдаков 1.1ab23ab$\frac{\pm}{2}$c±4a±c±,2.34ac$\frac{\pm}{2}$, **ЗДIII,VI**∓,6.2d–f3b±4ab		Билан 1.1ab2b, 2.12a±c±d±
Буря 1.1ab2a3b4,2.2a–d34a,3.12a3ac,4.12, 6.2a–d3b,7.12c		Васильев 2.1a, 3.2a3a±
Габдурахманов **ЗД I**, 4.12a	Гацолаева 1.2a	
Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d	Гринько 1.123c4ab5a±,2.134a,4.12a3a	Даровских 1.1ab,3.1a2a,4.12,5.1b2a,6.2abd3a
Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a	Долгирев **ЗД I, III**, 2.12a34abc$\frac{\pm}{2}$	Думанский **ЗД I**
Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1, 4.4ab	Елшин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1–1.4
Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±	Замятин 1.1–5abc±,2.12a–fh3–5+!, 3.1ab±23,4.123a4a–de±,5.1a2a3, 6.2a–g3	
Заславский **ЗД I,II**+mod**2.2h**,2.12a–g34,3.1–3	Измаилов 1abc±2a34abc±	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Казанцев 1.12a3c4ab±c±, **ЗД III**		Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$
Карпушкин 1.1abc+.3c	Кельвич 1.1	Кириллов 4.13a
Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a, 3.12ab+!3ab,4.123a4abf,5.4,6.23,7.12a–c		
Коваленко 1.2b4c,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a, 4.12ab3a,5.1a4,6.2a–e3b		Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a	Кравцов 1.123ac4ab±c±5a,2.12a–ce, 4.123a4d5, 6.2a–d3a	
Крайнюхов 4.13a	Круль 1.12ab34, 2.12a–f34a, 3.12a, 4.123a4bd	Лагуновская 1.1ab3bc±,2.12a34ab,3.2a,4.12
Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±	Лященко 1.1ab, 2.12a–c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd
Маслов 1.1ab2, 2.1, 4.12ab	Матушкин 1.12a4,2.2a–f34,**ЗД III**, 4.123a4abd,5.1a3	
Мещихин 1.2a3c	Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab34a, 3.123a,4.12a3ab4abdf–i,5.1a2ab,6.12a–d,7.1ab2ab	
Молоков 1.1ab4c±,**ЗД II–III**,4.12a,5.1a3	Неугодов 1.1ab3c4a	Никитин 1.1ab3bc4c, 3.1b2a, 4.12, 6.23a4c
Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a	Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$23ab±c±4a,2.12abd–g+!,3.1a∓b±2ab±3a±	
Пашментов 1.1ab,2.2a,3.12ab3a,4.12a,5.1a	Попов 1.3bc±4a5,2.4a,3.2ab±3a±,4.3a	Приходько 1.1ab23a4ac,3.1a±b2ab±3a±,4.12
Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–g34a,3.123a±, 4.12a3a4a, 6.2a–f3ab,7.1ab		
Сангаджиев (?) 1.1ab	Свириденков 1.1b3	Сеилов 1.1c
Солод 4.12	Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1	Устинский 1.1ab2a, 4.12a
Федоров 1.1ab2b4c, 2.4a$\frac{\pm}{2}$, 3.2a	Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.1–34c5±, 2.12a±be±f3, 3.3c, 4.1
Шарипова 1.123ac4,2.12a–f34a,3.12a3bc, 4.12,5.12d+!3		Шевцов 1.1ab2a±b3a±c±
Шлыков 1.1ab, 4.12a	Шляпугин 1.1ab3bc$\frac{\pm}{2}$4a, 2.1	Шуклин 1.1ab2a
Ягудин 4.124ab±d∓, **ЗД VI**		