6. Сферическая геометрия и векторное произведение

Задача Дня. *Теорема Хьемслева–Морли.* Пусть a, b и c — три попарно непараллельные прямые в пространстве. Обозначим через a' общий перпендикуляр к паре прямых b и c. Далее, обозначим через a'' общий перпендикуляр к паре прямых a и a' (дано, что эти прямые непараллельны). Аналогично определим прямые b'' и c''. Тогда три прямые a'', b'' и c'' имеют один общий перпендикуляр (т.е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

6.1. Пролетает ли самолет Москва–Нью-Йорк над Францией?

Серия A. Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат O трехмерного пространства. Назовем *большой окружностью* (*сферической прямой*) сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через точку O.

Каждому ненулевому вектору пространства можно сопоставить два объекта сферической геометрии: точку на сфере и большую окружность. А именно, вектору можно сопоставить точку пересечения сферы с лучом, исходящим из точки O в направлении данного вектора (рис. 1a), и можно сопоставить сечение сферы плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной этому вектору (рис. 1b). Точку (сферическую прямую), соответствующую данному вектору, будем обозначать той же буквой, что и сам вектор, только без значка вектора. Будем обозначать через $[\vec{A},\vec{B}]$ векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

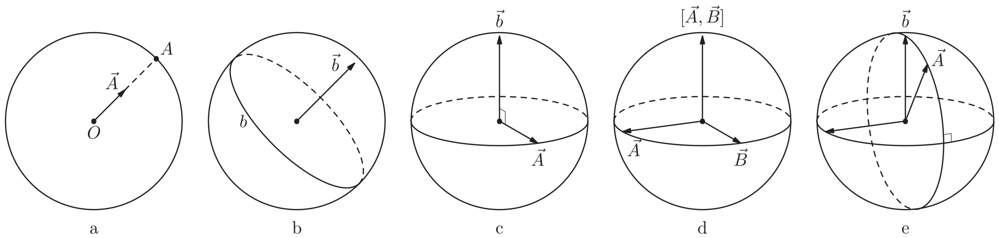

Рис. 1: Точки, прямые на сфере и векторы

6.2. a) Если векторы $\vec{A}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то точка A лежит на сферической прямой b (Рис 1c).
b) Вектор $[\vec{A},\vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через A и B (Рис. 1d).
c) Вектор $[\vec{A},\vec{b}]$ (если он ненулевой) соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую b (Рис. 1e).
d) Если $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, то три сферические прямые a, b, c пересекаются в двух точках.
e) Докажите *тождество 'бац минус цаб'*: $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A},\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A},\vec{B})$.
f) Докажите *тождество Якоби*: $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]] + [\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]] + [\vec{C},[\vec{A},\vec{B}]] = 0$.
g) (*В.И. Арнольд*) Пусть A, B и C — вершины сферического треугольника. Что означает геометрически тождество Якоби для векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$?

Серия B. В следующей задаче предполагается, что $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ — *единичные* векторы, идущие в вершины сферического треугольника ABC из центра сферы. Через AB, BC и CA обозначаются *длины* сторон треугольника, то есть длины дуг соответствующих больших окружностей. Через $\angle ABC$ обозначается угол между сферическими прямыми AB и BC.

6.3. a) Рассматривая вектор $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, докажите, что медианы треугольника на сфере пересекаются в одной точке.
b) С помощью тождества $([\vec{A},\vec{B}],[\vec{B},\vec{C}]) = (\vec{A},\vec{B})(\vec{B},\vec{C}) - (\vec{A},\vec{C})(\vec{B},\vec{B})$ получите *сферическую теорему косинусов:*

$$\sin AB \sin BC \cos\angle ABC = \cos AC - \cos AB \cos BC.$$

c) Сформулируйте и докажите сферическую теорему синусов.

Серия C. Прямую в пространстве можно задать следующим уравнением:

$$[u,x] = v.$$

Здесь u и v — фиксированные перпендикулярные друг другу векторы, а x — радиус-вектор переменной точки. Векторы u и v можно построить по данной прямой так: взять две точки A и B на этой прямой и положить $u = AB$, $v = [OA, OB]$.

Пусть $(u;v)$ и $(u';v')$ — две пары векторов. Назовем их *произведением* пару $(u'';v'')$, где $u'' = [u,u']$ и $v'' = [u,v'] + [v,u']$. Определим *сумму* пар векторов покомпонентно: $(u;v)+(u';v') = (u+u';v+v')$. Паре $(u;v)$ поставим в соответствие прямую $[u,x] = pr\,v$, где $pr\,v$ — проекция вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u.

6.4. a) Прямые $[u,x]=v$ и $[u',x]=v'$ пересекаются (или параллельны), если и только если $(u,v')+(v,u')=0$.
b) Наше соответствие переводит произведение в общий перпендикуляр.
c) Произведение пар векторов удовлетворяет тождеству Якоби.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab, 2.12abd, 3.1ab2a	Акимова 1.12ab4, 2.1	Астафаев 5.13a±b
Байдаков 1.1ab23ab$\frac{\pm}{2}$c±4a±c±,2.34ac$\frac{\pm}{2}$,**ЗДIII**	Буря 1.1ab2a3b4a,2.2a–d34a,3.12a,4.12a	Васильев 2.1a, 3.2a3a±
Гацолаева 1.2a	Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d	Гринько 1.123c4ab5a±, 2.134a, 4.12a3a
Даровских 1.1ab, 3.1a2a, 4.12ab, 5.1b	Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a	Долгирев **ЗД I, III**, 2.12a34abc$\frac{\pm}{2}$
Думанский **ЗД I**	Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1, 4.4ab	Елшин 1.1ab3c
Ерошенко 1.1–1.4	Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±	Замятин 1.123ac4bc,2.12a–f34bc,3.1ab±23,4.12a
Заславский 1.1–5, 2.12a–f3+.4	Измаилов 1abc±2a34abc±	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Казанцев 1.12a3c4ab±c±, **ЗД III**	Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$	Карпушкин 1.1abc+.3c
Кельвич 1.1	Кириллов 4.13a	Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a,3.12ab+!3ab,4.12
Коваленко 1.2b4c,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a,4.12ab3a		Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a	Кравцов 1.123ac4ab±c±5a,2.2ab,4.12	Крайнюхов 4.13a
Круль 1.12ab34, 2.12a–f34a, 3.12a, 4.123a4bd	Лагуновская 1.1ab3bc±,2.12a34ab,3.2a	Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±
Лященко 1.1ab, 2.12a–c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2, 2.1, 4.12ab
Матушкин 1.12a4,2.2a–f34,**ЗД III**, 4.123a4abd,5.1a3		Мещихин 1.2a3c
Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab34a,3.123a,4.12a3ab4abdf–i,5.1a		Молоков 1.1ab4c±,**ЗД II–III**,4.12a,5.1a3
Неугодов 1.1ab3c4a	Никитин 1.1ab3bc4c, 3.1b2a, 4.12	Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a
Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$23ab±c±4a,2.12abd–g+!, 3.1a∓b±2ab±3a±		Пашментов 1.1ab,2.2a,3.12ab3a,4.12a,5.1a
Попов 1.3bc±4a5,2.4a,3.2ab±3a±	Приходько 1.1ab23a4ac,3.1a±b2ab±3a±,4.12	
Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–eg34a,3.1a2a,4.13a	Сангаджиев (?) 1.1ab	Сеилов 1.1c
Солод 4.12	Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1	Устинский 1.1ab2a, 4.12a
Федоров 1.1ab2b4c, 2.4a$\frac{\pm}{2}$, 3.2a	Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.123ac4c5c±, 2.13, 3.3c
Шарипова 1.123ac4,2.12a–f34a,3.12a3bc, 4.12,5.12d+!3		Шевцов 1.1ab2a±b3a±c±
Шлыков 1.1ab, 4.12a	Шуклин 1.1ab2a	