

2. Проективная геометрия коник

Задача Дня. *Построение Кипера.* На сторонах неравнобедренного треугольника ABC , как на основаниях, во внешнюю сторону построены подобные равнобедренные треугольники ABC' , BCA' , CAB' . Докажите, что прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке K , и найдите геометрическое место точек K для данного треугольника ABC .

2.1. Точки A, O, C, B, D лежат на прямой в указанном порядке. Известно, что $AO = OB$ и $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Найдите двойное отношение (A, B, C, D) .

Двойное отношение точек A, B, C, D окружности — это величина $(A, B, C, D) := (XA, XB, XC, XD)$, где X — некоторая точка окружности, отличная от A, B, C и D .

- 2.2.** а) Двойное отношение (A, B, C, D) не зависит от выбора точки X на окружности.
 б) Проекция окружности из любой ее точки на прямую сохраняет двойные отношения.
 в) $(A, B, C, D) = (AD, BD, CD, d)$, где d — касательная к окружности в точке D .
 г) Выразите (A, B, C, D) через длины отрезков AC, BD, AD , и BC .
 д) Касательные к окружности в точках A и B пересекаются на CD . Найдите (A, B, C, D) .
 е) С помощью одной линейки проведите касательную к окружности из точки вне нее.
 ж) Если X не лежит на окружности, то $(A, B, C, D) \neq (XA, XB, XC, XD)$.
 з) Через любые 5 точек плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно провести конику.

2.3. Центральным проектированием можно перевести данную окружность в окружность, а данную точку внутри нее — в центр образа.

- 2.4.** а) *Теорема Ньютона.* Прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.
 б) *Теорема Бриансона.* Если шестиугольник $ABCDEF$ описанный, то AD, BE и CF пересекаются в одной точке.
 в) *Теорема Паскаля.* Если шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, то три точки $AE \cap FB, BD \cap CE$ и $AD \cap CF$ лежат на одной прямой.

2.5. Даны две различные точки A и A' на плоскости. Каждой прямой l , проходящей через A , поставили в соответствие некоторую прямую l' , проходящую через A' . Тогда следующие условия эквивалентны:

- точки вида $l \cap l'$ лежат на одной конике, проходящей через A и A' , или прямой;
- при нашем соответствии сохраняется двойное отношение.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab	Акимова 1.1ab	Гацולהва 1.2a	Гринько 1.1ab
Дмитриенко 1.1ab, 1.3a+, 1.4a	Думанский ЗД	Елишев 1.1ab	Елшин 1.1ab, 1.3c
Жукова 1.1a $\frac{1}{2}b \pm$	Измайлов 1abc \pm , 2a, 3, 4abc \pm	Ильин 1.1ab	Карпушкин 1.1ab, 1.1c+
Королев 1.1ab	Кравцов 1.2a	Круль 1.1ab, 1.3ab	Лагуновская 1b
Лященко 1.1ab	Малахов 1.1ab, 1.3c	Маслов 1.1ab, 1.2b	Магушкин 1.1, 1.2a, 1.4
Мецихин 1.2a, 1.3c	Михайлов 1.1ab, 1.2a \pm b \mp	Никитин 1.1ab	Новак 1.1a \Rightarrow b
Райко 1.1ab	Сеилов 1.1c	Халайджи Саша 1.1a, 1.2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шарипова 1.1ab, 1.2ab	