1. Проективная геометрия прямой и плоскости

Задача Дня. *Теорема Мёбиуса–фон Штаудта.* Любая биекция плоскости, переводящая прямые в прямые, является композицией параллельных проектирований.

1.1. a) В каком отношении делит основания трапеции прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон?
b) Даны две параллельные прямые и точки A, B на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка AB.
c) При помощи одной линейки невозможно построить середину данного отрезка.

Двойным отношением четырех точек A, B, C и D на прямой называется выражение $(A,B,C,D) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})/(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$. Четверка точек A, B, C и D с условием $(A,B,C,D) = -1$ называется *гармонической.*

1.2. a) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке G, AD и BC — в точке E. Прямые DB и EG пересекаются в точке H, AC и EG — в F. Найдите (E,G,F,H).
b) Пусть $(A,B,C,D) = x$. Найдите двойные отношения точек A, B, C, D, записанных в другом порядке.

1.3. a) Композицией нескольких центральных проектирований прямой можно перевести любые три различные точки в любые другие три различные точки.
b) Композицией нескольких параллельных проектирований плоскости можно перевести любой треугольник в любой другой.
c) Центральным проектированием плоскости можно перевести любой выпуклый четырехугольник в параллелограмм.

1.4. a) Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках M и N, прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках P и Q. Тогда прямые PN, MQ и EF пересекаются в одной точке или параллельны.
b) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паппа.
c) Сформулируйте и докажите теорему, обратную к теореме Дезарга.

1.5. Пусть биекция f проективной прямой переводит любую гармоническую четверку точек в гармоническую и оставляет на месте точки 0, 1, ∞. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$
a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; b) $f(xy) = f(x)f(y)$; c) $f(x) = x$.

Технические моменты:

- задачи принимаются как устно на семинаре, так и письменно на сайте HTTP://MATH.OLYMP.MIOO.RU/COURSE/CATEGORY.PHP?ID=30;
- рассказывается уже решенные задачи (т.е. решать задачу в процессе сдачи или пытаться по ходу рассказа доделывать решение мы не разрешаем; найденные в решении недочеты можно исправить при следующем подходе);
- рассказ решения начинается с ответа на вопрос задачи;
- для всех вспомогательных утверждений приводятся четкие формулировки и полные доказательства.