Представления симметрических групп I

0. Групповая алгебра (напоминание). *Групповая алгебра* $k[G]$ группы G — это векторное пространство с базисом e_g, занумерованным элементами группы G, и умножением, задаваемым правилом $e_h e_h = e_{hg}$.

Представление группы над полем k — то же самое, что $k[G]$-модуль. В частности, $k[G]$ — представление группы G (*регулярное представление*). В это представление входят все неприводимые; можно сказать и точнее:

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{V \in \mathrm{IrrRep}(G)} V^{\dim V}.$$

С другой стороны, как алгебра $\mathbb{C}[G]$ является прямой суммой матричных:

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{V \in \mathrm{IrrRep}(G)} \mathrm{End}_{\mathrm{vect}} V.$$

Как следствие, все представления группы G одномерны тогда и только тогда, когда групповая алгебра коммутативна (т. е. сама группа коммутативна).

1. Критерий простоты ветвления. Пусть H — подгруппа группы G. Неприводимое представление группы G разлагается в сумму неприводимых представлений группы H с какими-то кратностями. Если все эти кратности равны 0 или 1, говорят о *простом ветвлении.*

Например, решившие задачу 0 последнего домашнего задания легко поймут, что для вложения $\mathbb{Z}/3 \subset S_3$ ветвление просто.

В силу леммы Шура простота ветвления для неприводимого G-представления V равносильна тому, что алгебра $\mathrm{End}_H(V)$ коммутативна.

Как мы знаем, все линейные преобразования всех неприводимых представлений удобно упакованы в групповую алгебру $\mathbb{C}[G]$; морфизмами H-представлений из них являются те, что коммутируют с действием H, т. е. *централизатор*[1] подалгебры $\mathbb{C}[H]$ в алгебре $\mathbb{C}[G]$:

$$\bigoplus_{V \in \mathrm{IrrRep}(G)} \mathrm{End}_H(V) \cong Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G]).$$

Следствие: простота ветвления для вложения $H \subset G$ равносильна коммутативности централизатора $Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G])$.

Ясно, что этот централизатор содержит как $Z(\mathbb{C}[H])$, так и $Z(\mathbb{C}[G])$ и достаточное условие его коммутативности — равенство $Z(\mathbb{C}[H], \mathbb{C}[G]) = \langle Z(\mathbb{C}[H]), Z(\mathbb{C}[G]) \rangle$.

2. Простота ветвления для симметрической группы. Напомним, что наша цель — описать неприводимые представления симметрических групп. Как учат Вершик и Окуньков, при этом полезно рассматривать цепочку вложений[2] $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n$ и ветвления при соответствующих ограничениях.

Наша **первая цель** — доказать простоту ветвления для вложения $S_{n-1} \subset S_n$. Как мы знаем, простота ветвления следует из коммутативности централизатора.

[1] Напомним, что $Z(B, A) = \{z \in A \mid \forall b \in B \; zb = bz\}$; в частности $Z(A, A) = Z(A)$.

[2] S_{i-1} вложено в S_i как стабилизатор последнего элемента.

Рассмотрим проектор

$$\pi\colon \mathbb{C}[S_n] \to Z(\mathbb{C}[S_{n-1}], \mathbb{C}[S_n]), \quad x \mapsto \frac{1}{|S_{n-1}|} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \sigma^{-1} x \sigma.$$

Он не согласован с умножением, но если элементы a и b коммутируют, то $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ (упражнение). Поэтому централизатор (мультипликативно) порожден образами циклов.

Ясно еще, что π проектирует алгебру $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ на ее центр. Значит, централизатор порожден алгеброй $Z(\mathbb{C}[S_{n-1}])$ и образами циклов c_i вида $(1\ 2\ \dots\ i-1\ n)$.

Лемма. Централизатор порожден $Z(\mathbb{C}(S_{n-1}))$ и *элементом Юнга–Юциса–Мёрфи*

$$X_n := (1\ n) + (2\ n) + \ldots + (n-1\ n),$$

совпадающим с точностью до множителя с $\pi(1\ n)$.

Для доказательства леммы нужно проверить, что $\pi(c_i) \in \langle Z(\mathbb{C}(S_{n-1})), X_n\rangle$. *Указание:* для доказательства шага индукции рассмотрите разность $\pi(c_{i+1}) - X_n \cdot \pi(c_i)$.

Из леммы сразу следует коммутативность централизатора. Действительно,

$$Z(\mathbb{C}[S_{n-1}], \mathbb{C}[S_n]) = \langle Z(\mathbb{C}(S_{n-1})), X_n\rangle \subset \langle Z(\mathbb{C}[S_{n-1}]), Z(\mathbb{C}[S_n])\rangle$$

(включение имеет место, так как если прибавить к X_n сумму всех транспозиций из S_{n-1} получится сумма всех транспозиций из S_n; в действительности имеет место даже равенство, поскольку включение $\langle Z(\mathbb{C}[S_{n-1}]), Z(\mathbb{C}[S_n])\rangle \subset Z(\mathbb{C}[S_{n-1}], \mathbb{C}[S_n])$ очевидно).

3. Граф Юнга (анонс). Рассмотрим граф, вершины которого суть представления S_n для всевозможных n, а ребро ведет из $U \in \mathrm{IrrRep}(S_{n-1})$ в $V \in \mathrm{IrrRep}(S_n)$, если U входит в разложение $V|_{S_{n-1}}$.

По этому графу можно понять, как неприводимое представление группы S_n раскладывается в сумму неприводимых представлений группы S_{n-k}: получается сумма концов всех путей, ведущих из этого представления на k этажей вниз.

В частности, любое представление V разлагается в сумму одномерных пространств, количество которых — число путей из корня нашего графа (единственного неприводимого представления S_1) в вершину V. Выбрав в каждом таком одномерном пространстве по вектору, можно получить в каждом представлении *базис Гельфанда–Цетлина* (этот базис задан почти канонически: каждый из векторов можно, конечно, домножать на константу).

Как мы увидим на следующей лекции, в действительности этот граф ветвления — это в точности *граф Юнга*, вершины которого суть диаграммы Юнга, а каждое ребро соответствует добавлению клетки. Соответственно, пути из корня (т. е. элементы базиса Гельфанда–Цетлина) нумеруются таблицами Юнга (стандартными таблицами) данной формы. В частности, доказанная на прошлой лекции формула крюков является формулой для размерности неприводимого представления симметрической группы.