Алгебраическая
геометрия 1

02.12.2013
Листок 12

Конечные расширения колец

Задача 1. Пусть $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, где $d \in \mathbb{Z}$ – число, свободное от квадратов. Найдите $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых в K.

Задача 2. a) Найдите слои отображения спектров $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ над простыми идеалами (p) для $p = 2, 3, 5, 7, 11$. Опишите при этом кольцо $\mathbb{Z}[i]/(p)$.

b) То же для произвольного p.

Задача 3. Покажите, что следующие кольца целозамкнуты в своём поле частных

a) $\mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$,

b) $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$,

c^*) $\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 + y^2 - z^2)$.

Задача 4. Пусть $A \subset B$ – целое расширение колец без делителей нуля. Покажите, что A – поле $\iff$ B – поле.

Задача 5. Пусть кольцо A без делителей нуля целозамкнуто, а $S \subset A$ – мультипликативная система. Покажите, что кольцо $S^{-1}(A)$ целозамкнуто.

Задача 6*. Пусть G – конечная группа автоморфизмов кольца A. Обозначим через A^G множество неподвижных элементов: $A^G = \{a \in A \mid \forall g \in G \; g(a) = a\}$.

a) Покажите, что расширение $A^G \subset A$ целое.

b) Пусть $\mathfrak{p} \subset A^G$ – простой идеал. Покажите, что G транзитивно действует на множестве таких простых идеалов $\mathfrak{q} \subset A$, что $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$.