Алгебраическая геометрия 1

11.11.2013
Листок 9

Локализация

Задача 1. Пусть $a = (1, 0) \in A \times B$. Опишите локализацию $(A \times B)_a$.

Задача 2. Какие системы из главного примера из лекции насыщенны?

Задача 3. Пусть $S \subset A$ – мультипликативная система, а $\bar{S}$ – её насыщение. Тогда:
a) $S \subset \bar{S}$;
b) система $\bar{S}$ насыщенна;
c) локализации $S^{-1}A$ и $\bar{S}^{-1}A$ изоморфны.

Задача 4. Пусть $S \subset T \subset A$ – мультипликативные системы. Обозначим через ϕ гомоморфизм $S^{-1}A \to T^{-1}A$ такой, что $\phi(a/s) = a/s$. Покажите, что ϕ – изоморфизм $\iff T \subset \bar{S}$.

Задача 5. Опишите все насыщенные мультипликативные системы в $\mathbb{Z}$.

Задача 6. Проверьте, что ядро гомоморфизма $i\colon A \to S^{-1}A$ состоит из таких a, что $as = 0$ при некотором $s \in S$.

Задача 7. Покажите, что $\mathcal{N}(S^{-1}A) = S^{-1}\mathcal{N}(A)$.

Задача 8. Пусть $K, N \subset M$ – подмодули модуля M над A. Покажите, что
a) $S^{-1}K + S^{-1}N = S^{-1}(K + N)$;
b) $S^{-1}K \cap S^{-1}N = S^{-1}(K \cap N)$;
c) $S^{-1}M/S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N)$.

Задача 9. a) Покажите, что $\mathcal{N}(A) = 0 \iff \mathcal{N}(A_{\mathfrak{p}}) = 0$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$.
b) Верно ли, что в A нет делителей нуля $\iff$ в $A_{\mathfrak{p}}$ нет делителей нуля для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$?