Алгебраическая геометрия 1

21.10.2013
Листок 7

Модули

Задача 1. Покажите, что $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-модули взаимно-однозначно соответствуют абелевым группам M, для которых $m \cdot M = 0$.

Задача 2. Покажите, что

a) A-модуль циклический $\iff$ имеет вид A/I, где I – идеал;

b) A-модуль простой $\iff$ имеет вид A/I, где I – максимальный идеал.

Задача 3. Приведите пример кольца A и идеалов I_1, I_2 таких, что кольца A/I_1 и A/I_2 изоморфны, а A-модули A/I_1 и A/I_2 не изоморфны.

Задача 4. Докажите, что

a) $\mathrm{Hom}_A(A/I, A/I) \cong A/I$;

b) $\mathrm{Hom}_A(A/I, A/J) \cong A/J$ при $I \subset J$;

c) $\mathrm{Hom}_A(A/I, M) \cong \{m \in M \mid I \cdot m = 0\}$.

Задача 5. Пусть $M_1, M_2 \subset M$ – подмодули. Проверьте, что гомоморфизм $M_1 \oplus M_2 \to M$, заданный формулой $(m_1, m_2) \mapsto m_1 + m_2$, является изоморфизмом $\iff$ $M_1 \cap M_2 = 0$, $M_1 + M_2 = M$.

Если это так, говорят, что M *раскладывается в прямую сумму* своих подмодулей M_1 и M_2.

Задача 6. Для подмодулей $K, L \subset M$ обозначим

$$(K : L) = \{a \in A \mid a \cdot L \subset K\}.$$

a) Покажите, что $(K : L)$ – идеал;

b) Найдите $(K : L)$ для $K = (k), L = (l)$ – идеалов в $\mathbb{Z}$.

Задача 7. Проверьте, что

a) $\mathrm{Ann}(M_1 + M_2) = \mathrm{Ann}(M_1) \cap \mathrm{Ann}(M_2)$;

b) $\mathrm{Ann}((M_1 + M_2)/M_2) = (M_2 : M_1)$.

Задача 8. Покажите, что для $K \subset L \subset M$ верно $M/L \cong (M/K)/(L/K)$.