Алгебраическая геометрия 1

09.09.2013
Листок 1

Кольца и идеалы

Задача 1. Найдите делители нуля в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Задача 2 (Китайская теорема об остатках). Пусть m и n – взаимное простые числа. Докажите, что кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ изоморфны.
Подсказка: постройте отображение в какую-нибудь из сторон и проверьте, что это изоморфизм колец.
Задача 3. Опишите все изоморфизмы колец a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и b^*) $\mathbb{R}$ на себя.
Задача 4. Покажите, что кольцо есть поле $\Leftrightarrow$ все его идеалы тривиальны.

Идеалом кольца A, *порожденным семейством элементов* $T \subset A$, называется наименьший по вложению идеал в A, содержащий все элементы T.
Задача 5. Покажите, что идеал, порождённый семейством элементов $T \subset A$, существует и состоит из всевозможных конечных сумм $\sum_i a_i t_i$, где $a_i \in A, T_i \in T$.
Задача 6. Пусть $e \in A$ – *идемпотент*, т.е. такой элемент, что $e^2 = e$.
a) Идеал (e) является кольцом относительно сложения и умножения из A.
b) Кольцо A изоморфно прямому произведению колец (e) и $(1-e)$.
Задача 7. Опишите простые и максимальные идеалы в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Задача 8. Любой идеал в $A \times B$ имеет вид $I \times J$, где $I \subset A$ и $J \subset B$ – идеалы.
Задача 9. Любой простой идеал в $A \times B$ имеет вид $\mathfrak{p} \times B$ или $A \times \mathfrak{q}$, где $\mathfrak{p} \subset A$ и $\mathfrak{q} \subset B$ – простые идеалы.
Задача 10. Найти факторкольцо $\mathbb{C}[x]/I$, где
a) $I = \{f \mid f(2) = 0\}$;
b) $I = \{f \mid f(2) = f(3) = f(-2) = 0\}$.
Задача 11. a) Нильрадикал $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ тривиален $\Leftrightarrow$ m свободно от квадратов.
b) Найдите нильрадикал $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ в общем случае.
Задача 12. Если n – нильпотент, то $1 + n$ – обратимый элемент.