Целые расширения колец

Напомним сначала

Определение 1. Расширение колец $A \subset B$ *конечно порождено*, если B конечно порождёно над A как кольцо.

Определение 2. Расширение колец $A \subset B$ *конечно*, если B – конечно порождённый модуль над A.

Определение 3. Элемент b кольца B *цел* над подкольцом $A \subset B$, если найдутся $n > 0$ и $a_i \in A$, для которых

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0.$$

Если A и B – поля, вместо целых обычно говорят об алгебраических элементах.

Предложение 4. *Пусть $A \subset B$ – подкольцо. Следующие условия на элемент $b \in B$ равносильны:*

1. *b цел над A;*
2. *подкольцо $A[b] \subset B$ – конечно порождённый A-модуль;*
3. *найдётся подкольцо $C \subset B$, конечно порождённое как A-модуль и содержащее $A[b]$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если $f(b) = b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = 0$, то элементы $1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}$ порождают $A[b]$ как A-модуль. Действительно, любой элемент $A[b]$ имеет вид $p(b)$, где $p \in A[x]$ – многочлен. Поделим p на f с остатком, это возможно, так как старший коэффициент f равен 1. Получим $p(x) = f(x)q(x) + r(x)$, значит $p(b) = r(b)$, и $p(b)$ выражается через указанные порождающие.

$2 \Rightarrow 3$. Очевидно: возьмём $C = A[b]$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $c_1, \ldots, c_n \in C$ – набор порождающих. Запишем $xc_i = \sum_j a_{ij}c_j$, где $a_{ij} \in A$. Пусть δ_{ij} – символ Кронекера, обозначим матрицу $(a_{ij} - x\delta_{ij})$ через M. Тогда $M \cdot (c_1, \ldots, c_n)^T = 0$. Домножим слева на присоединнную матрицу к M, получим $\det M \cdot (c_1, \ldots, c_n)^T = 0$. Это значит, что $\det M \cdot C = 0$, а так как $1 \in C$, то $\det M = 0$. Осталось заметить, что определитель M – многочлен от x с коэффициентами из A и старшим коэффициентом 1. □

Предложение 5. *Если элементы $b_1, \ldots, b_n \in B$ целы над подкольцом $A \subset B$, то порождённое ими подкольцо $A[b_1, \ldots, b_n] \subset B$ конечно над A.*

Доказательство. Индукция по n. Шаг индукции: $A' = A[b_1, \ldots, b_{n-1}]$ конечно над A. Кольцо $A'[b_n]$ конечно над A' по предыдущему предложению, так как b_n цел над A и значит над A'. Тогда расширение $A \subset A[b_1, \ldots, b_n]$ конечно как композиция конечных расширений. □

Следствие 6. *Элементы кольца B, целые над подкольцом A, образуют подкольцо $A \subset C \subset B$. Оно называется* целым замыканием *A в B.*

Доказательство. Пусть $b_1, b_2 \in B$ целы над A. Надо показать, что $b_1 \pm b_2$ и $b_1 b_2$ тоже целы над A. Для этого рассмотрим кольцо $A[b_1, b_2]$. Оно конечно над A по предыдущему предложению и содержит $b_1 \pm b_2$ и $b_1 b_2$. По предложению 4 ($3 \Rightarrow 1$) получаем, что эти элементы целы над A. □

Определение 7. Пусть C – целое замыкние подкольца A в кольце B. Если $C = B$, то B называется *целым* над A. Если $C = A$, то A называется *целозамкнутым* в B.

Если кольцо A целозамкнуто в $\mathrm{Frac}(A)$, оно называется *целозамкнутым.*

Следствие 8. *Конечное расширение колец – то же, что целое и конечно порождённое.*

Пример 9.

1. $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$.
2. Вообще, если в A разложение на простые множители единственно, то A целозамкнуто в $\mathrm{Frac}(A)$.
3. $\mathbb{C}[x^3] \subset \mathbb{C}[x]$ – целое расширение.
4. Пусть $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен, $C \subset \mathbb{C}^2$ – заданная им кривая, $\mathbb{C}[C] = \mathbb{C}[x, y]/(p)$. Если в p входит переменная y, то имеем вложение $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[C]$. Это расширение цело $\iff$ старший по y член p не содержит x. В частности, для «случайного» p оно цело.
5. Целое замыкание $\mathbb{C}[x^2, x^3]$ в $\mathbb{C}(x)$ – это $\mathbb{C}[x]$. При этом $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x^2, x^3]) = \mathbb{C}(x)$, поэтому кольцо $\mathbb{C}[x^2, x^3]$ не целозамкнуто.

Предложение 10. *Целое замыкание A в B целозамкнуто в B.*

Доказательство. Пусть C – целое замыкание A в B. Надо показать, что любой элемент $b \in B$, целый над C, цел и над A. Имеем соотношение $b^n + c_{n-1}b^{n-1} + \ldots + c_0 = 0$, где $c_i \in C$. Рассмотрим башню расширений $A \subset A' = A[c_0, \ldots, c_{n-1}] \subset A'[b]$. Её первый этаж конечен по предложению 5, а второй – по предложению 4, так как b цел над A'. Значит, расширение $A \subset A[c_0, \ldots, c_{n-1}, b]$ конечно и поэтому b цел над A. $\square$

Теперь ненадолго обратимся к арифметике.

Определение 11. Целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}$ называют *кольцом целых алгебраических чисел*, а его элементы – *целыми алгебраическими числами.*

Если $\mathbb{Q} \subset K$ – конечное расширение полей, то целое замыкание $\mathbb{Z}$ в K называют *кольцом целых чисел* поля K и обозначают $\mathcal{O}_K$.

Пример 12.

1. $\mathcal{O}_\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$;
2. $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[i]} = \mathbb{Z}[i]$;
3. если $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, то очевидно $\mathcal{O}_K \supset \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Однако равенства здесь нет: $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{1} \in \mathcal{O}_K$. Можно показать, что через этот корень уже можно выразить все целые: $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}]$.

Задача 1. Для $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, где $d \in \mathbb{Z}$ свободно от квадратов, найти кольцо целых $\mathcal{O}_K$.

Некоторые свойства целых чисел заданного числового поля собраны в следующем предложении. Мы приводим его без доказательства.

Предложение 13. *Пусть K – конечное расширение $\mathbb{Q}$ степени n. Тогда существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$, что $\mathcal{O}_K = \oplus_i \alpha_i \mathbb{Z}$ и α_i образуют базис K над $\mathbb{Q}$.*

Геометрическим аналогом конечного гомоморфизма колец являются конечные отображения многообразий. А именно, регулярное отображение $\phi\colon X \to Y$ называется *конечным*, если индуцированный им гомоморфизм колец $\mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ конечен. Для такого отображения прообраз любой точки из Y – конечное множество точек.

Чтобы получить более полную информацию о слоях конечного отображения, исследуем слои отображения $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ для конечного расширения колец $A \subset B$. Пусть ϕ обозначает вложение $A \to B$. *Слоем* отображения $\phi^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ над идеалом $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Spec}(A)$ называется $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}\}$.

Мы опишем слои отображения спектров для произвольного гомоморфизма колец $A \to B$, а потом применим полученный результат к конечным расширениям.

Определение 14. Пусть $\phi\colon A \to B$ – гомоморфизм и $S \subset A$ – мультипликативная система, для которой $0 \notin \phi(S)$. Определим $S^{-1}B$ как локализацию кольца B по мутипликативной системе $\phi(S)$. Отметим, что имеется канонический гомоморфизм колец $\bar{\phi}\colon S^{-1}A \to S^{-1}B$, заданный правилом $a/s \mapsto \phi(a)/\phi(s)$. Для простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ и $S = A \setminus \mathfrak{p}$ получаем локализацию $B_\mathfrak{p}$ и гомоморфизм $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$.

Для вычисления слоя отображения спектров над данным простым идеалом понадобятся две леммы

Лемма 15. *Пусть $\phi\colon A \to B$ – гомоморфизм, $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал, $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Тогда выполнено одно из двух:*

1. $0 \in \phi(S)$, *тогда слой ϕ^* над $\mathfrak{p}$ пуст;*
2. $0 \notin \phi(S)$, *тогда имеется диаграмма гомоморфизмов колец*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"] & B \arrow[d, "i"] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r, "\bar{\phi}"] & B_\mathfrak{p}. \end{tikzcd}$$

При этом $i^*\colon \operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}) \to \operatorname{Spec}(B)$ изоморфно отображает слой $\bar{\phi}^{*-1}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$ в слой $\phi^{*-1}(\mathfrak{p})$.

Доказательство. Если существует такой простой идеал $\mathfrak{q} \subset B$, что $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$, то $\phi(S) \cap \mathfrak{q} = \emptyset$, поэтому $0 \notin \phi(S)$. Это доказывает первую часть.

Если же $0 \notin \phi(S)$, то локализация $B_\mathfrak{p}$ определена и можно рассмотреть диаграмму. Пусть $\mathfrak{q}' \subset B_\mathfrak{p}$ и $\bar{\phi}^*\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Тогда $\phi^* i^* \mathfrak{q}' = i^* \bar{\phi}^* \mathfrak{q}' = i^* \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, поэтому $i^*\mathfrak{q}' \in \phi^{*-1}(\mathfrak{p})$.

Наоборот, пусть $\mathfrak{q} \subset B$ и $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. Тогда $\mathfrak{q} \cap \phi(S) = \emptyset$, поэтому существует простой идеал $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^e \subset B_\mathfrak{p}$, для которого $i^*\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$. Далее, $i^*(\bar{\phi}^*\mathfrak{q}') = \phi^* i^* \mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$, значит $\bar{\phi}^*\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, так как $i^*\colon \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p}) \to \operatorname{Spec}(A)$ – вложение. $\square$

Лемма 16. *Пусть* $\phi\colon A \to C$ *– гомоморфизм, кольцо* A *локально с максимальным идеалом* $\mathfrak{m}$. *Тогда выполнено одно из двух:*

1. $\mathfrak{m}^e = C$, *тогда слой* ϕ^* *над* $\mathfrak{m}$ *пуст;*

2. $\mathfrak{m}^e \neq C$, *тогда имеется диаграмма гомоморфизмов колец*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[d, "\pi"] \\ A/\mathfrak{m} \arrow[r, "\bar{\phi}"] & C/\mathfrak{m}^e. \end{tikzcd}$$

   При этом $\pi^*\colon \operatorname{Spec}(C/\mathfrak{m}^e) \to \operatorname{Spec}(C)$ *изоморфно отображает* $\operatorname{Spec}(C/\mathfrak{m}^e)$ *в слой* $\phi^{*-1}(\mathfrak{m})$.

Доказательство. Для простого идеала $\mathfrak{q} \subset C$ верно $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{m} \iff \mathfrak{q}^c \supset \mathfrak{m} \iff \mathfrak{q} \supset \phi(\mathfrak{m}) \iff \mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}^e$. Если $\mathfrak{m}^e = C$, то таких простых идеалов нет. Иначе простые идеалы в C, содержащие $\mathfrak{m}^e$, находятся в биекции с простыми идеалами $C/\mathfrak{m}^e$. □

Объединяя эти леммы, получаем

Следствие 17. *Для гомоморфизма* $\phi\colon A \to B$ *и простого идеала* $\mathfrak{p} \subset A$ *либо слой* ϕ^* *над* $\mathfrak{p}$ *пуст, либо равен* $\operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$.

Перед тем, как применить это к конечным расширениям, установим некоторые их свойства.

Лемма 18.
1. *Пусть* $A \subset B$ *– целое расширение колец без делителей нуля. Тогда* A *– поле* $\iff$ B *– поле.*

2. *Пусть* $A \subset B$ *– целое расширение колец,* $\mathfrak{q} \subset B$ *– простой идеал. Тогда идеал* $\mathfrak{q}$ *максимален* $\iff$ $\mathfrak{q}^c$ *максимален.*

Доказательство. Проверку первого утверждения оставим в качестве упражнения, докажем второе. Для этого рассмотрим вложение колец $A/\mathfrak{q}^c \to B/\mathfrak{q}$, это также целое расширение. К нему можно применить первую часть, остаётся использовать то, что идеал максимален $\iff$ фактор по нему – поле. □

Предложение 19. *Пусть* $A \subset B$ *– целое расширение колец. Тогда индуцированное отображение спектров* $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *сюръективно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал и ϕ обозначает вложение $A \to B$. Тогда $\phi(A \setminus \mathfrak{p})$ не содержит нуля, и по лемме 15 искомый слой состоит из идеалов $B_\mathfrak{p}$, сужение которых в $A_\mathfrak{p}$ есть $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Заметим, что расширение $\bar{\phi}\colon A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ цело. Возьмём произвольный максимальный идеал $\mathfrak{n} \subset B_\mathfrak{p}$. По лемме 18.2, его сужение $\mathfrak{m}$ в $A_\mathfrak{p}$ снова будет максимальным, а значит, $\mathfrak{m}^c = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Получаем, что слой ϕ^* над $\mathfrak{p}$ непуст (он содержит $i^*\mathfrak{n}$). □

В случае, если морфизм не только цел, но и конечен, о слоях можно сказать больше.

Предложение 20. *Пусть $A \subset B$ – конечное расширение колец. Тогда слои индуцированного отображения спектров* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *непусты, конечны и дискретны в топологии Зарисского.*

Доказательство. Непустота доказана выше. Продолжая доказательство предыдущего предложения, заметим, что для $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ по лемме 16 имеем $\mathfrak{m}^e \neq B_\mathfrak{p}$. Значит, слой ϕ^* над $\mathfrak{p}$ изоморфен $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$. Имеем конечное расширение колец $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m} \to B_p/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$. При этом $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ – поле, обозначим его через k. А кольцо $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ – конечномерное векторное пространство над k, обозначим его F. Если идеал $\mathfrak{q} \subset F$ прост, то его сужение в k – простой, а значит и максимальный идеал, и по лемме 18.2 $\mathfrak{q}$ тоже максимален. Значит, все простые идеалы в F максимальны, поэтому все точки спектра F замкнуты в топологии Зарисского, т.е. она дискретна. Осталось показать, что их конечное число. Пусть $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \subset F$ – максимальные идеалы. Тогда $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = F$ при $i \neq j$. По китайской теореме об остатках имеем

$$F/\cap_i \mathfrak{m}_i \cong \prod_i F/\mathfrak{m}_i.$$

Вычисляя размерность над k, получим

$$\dim F \geqslant \dim(F/\cap_i \mathfrak{m}_i) = \sum_i \dim F/\mathfrak{m}_i \geqslant n.$$

Значит, число максимальных идеалов F не больше $\dim_\mathsf{k} F$. □

Закончим обсуждение слоёв конечных отображений геометрическим примером.

Пример 21. Пусть $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен, $C \subset \mathbb{C}^2$ – заданная им кривая, $\mathbb{C}[C] = \mathbb{C}[x, y]/(p)$. Пусть в p входит переменная y, тогда имеем вложение $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[C]$. Геометрически вложению $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[C]$ соответствует проекция кривой C на ось x. Это расширение конечно $\iff$ старший по y член p не содержит x. Если это так, то все слои такой проекции непусты и состоят из конечного числа точек, не превосходящего степени многочлена f по y. Если же расширение колец не цело, то слои проекции, конечно, всё равно будут конечными, но могут становиться пустыми. Например, если $p(x, y) = xy - 1$, то старший коэффициент по y зависит от x, и у проекции гиперболы $xy = 1$ на ось x прообраз точки 0 пуст.