Локализация для модулей

В прошлый раз мы определили локализацию кольца по мультипликативной системе и выяснили, как ведут себя идеалы кольца при локализации. Сегодня мы научимся локализовать модули. Но сначала сделаем важное замечание, относящееся к кольцам.

Простые идеалы кольца $A_\mathfrak{p}$ соответствуют тем простым идеалам в A, которые содержатся в $\mathfrak{p}$. Поэтому среди простых идеалов в $A_\mathfrak{p}$ есть максимальный по включению. Это идеал $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^e$, и он максимальный. Колец с таким свойством нам до сих пор не встречалось, однако они устроены заметно проще произвольных колец и играют в алгебре важную роль. Такие кольца называются *локальными*.

Определение 1. Кольцо A называется *локальным*, если оно содержит единственный максимальный идеал.

Предложение 2. *Максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$ единственный $\iff$ все элементы $A \setminus \mathfrak{m}$ обратимы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m}$ единственный и $x \notin \mathfrak{m}$. Если $(x) = A$, то x обратим. Если идеал (x) собственный, то он вложим в некоторый максимальный идеал $\mathfrak{m}'$. При этом $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$ так как $x \in \mathfrak{m}', x \notin \mathfrak{m}$, противоречие.

Пусть все элементы из $A \setminus \mathfrak{m}$ обратимы и $\mathfrak{m}'$ – отличный от $\mathfrak{m}$ максимальынй идеал. Так как $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m}$, $\exists y \in \mathfrak{m}' \setminus \mathfrak{m}$. По условию y обратим, а значит $\mathfrak{m}' = A$, противоречие. □

Примеры локальных колец:

1. кольца $A_\mathfrak{p}$;
2. поля;
3. кольца $\mathsf{k}[x]/(x^n)$.

Замечание 3. Как было сказано, локализация кольца по простому идеалу – локальное кольцо. Более того, любое локальное кольцо получается локализацией по простому идеалу. Например, самого себя по своему максимальному идеалу. Действительно, если A локально и $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал, то $S = A \setminus \mathfrak{m}$ состоит из обратимых элементов. Поэтому локализация A по S изоморфна A.

Обратимся теперь к модулям. Их тоже можно локализовать.

Определение 4. Пусть M – модуль над кольцом A, а $S \subset A$ – мультипликативная система. Определим локализацию M по S как множество классов эквивалентности дробей m/s, где $m \in M, s \in S$, по отношению эквивалентности $m/s \sim m'/s'$, если $\exists t \in S$ для которого $t(ms' - m's) = 0$. Обозначение: $S^{-1}M$.

Так же, как и для локализации колец, можно ввести на $S^{-1}M$ сложение по обычным правилам сложения дробей. Получим абелеву группу. Кроме того, можно ввести на $S^{-1}M$ умножение на элементы из $S^{-1}A$ по правилу $a/s \cdot m/s' = am/ss'$, это превращает $S^{-1}M$ в $S^{-1}A$-модуль. Наконец, всякий гомоморфизм $f\colon M \to N$ индуцирует гомоморфизм $S^{-1}A$-модулей $\bar{f} = S^{-1}f\colon S^{-1}M \to S^{-1}N$ по правилу $m/s \mapsto f(m)/s$. Таким образом, локализация является функтором из A-модулей в $S^{-1}A$-модули.

Предложение 5. *Локализация – точный функтор.*

Доказательство. Надо показать, что для любой точной последовательности

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

будет точной последовательность

$$S^{-1}M' \xrightarrow{\bar{f}} S^{-1}M \xrightarrow{\bar{g}} S^{-1}M''.$$

Действительно, $\operatorname{im} \bar{f} \subset \ker \bar{g}$, так как $\bar{g}\bar{f}(m'/s) = \bar{g}(f(m')/s) = g(f(m'))/s = 0$.

Обратно, пусть $m/s \in \ker \bar{g}$. Тогда $g(m)/s = 0$, поэтому для некоторого $t \in S$ имеем $tg(m) = 0$, т.е. $g(tm) = 0$. Значит $tm \in \operatorname{im} f$, найдётся $m' \in M'$ такой, что $f(m') = tm$. Тогда $f(m'/ts) = f(m')/ts = tm/ts = m/s$, поэтому $m/s \in \operatorname{im} \bar{f}$. □

Следствие 6. *Пусть $N \subset M$ – модули над A, а $S \subset A$ – мультипликативная система. Тогда $S^{-1}N$ – подмодуль в $S^{-1}M$.*

Доказательство. Применим локализацию к точной последовательности $0 \to N \to M$. □

Замечание 7. Заметим, что аналогичное утверждение для тензорного умножения неверно: не всегда $N \otimes K$ – подмодуль в $M \otimes K$.

Задача 1. Пусть $K, N \subset M$ – подмодули модуля M над A. Покажите, что
a) $S^{-1}K + S^{-1}N = S^{-1}(K + N)$;
b) $S^{-1}K \cap S^{-1}N = S^{-1}(K \cap N)$;
c) $S^{-1}M / \cap S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N)$.

В действительности, локализация модуля сводится к тензорному умножению на локализованное кольцо:

Предложение 8. *Модуль $S^{-1}M$ изоморфен $(S^{-1}A) \otimes_A M$ как $S^{-1}A$-модуль.*

Доказательство. Построим гомоморфизмы в обе стороны. Чтобы построить гомоморфизм $(S^{-1}A) \otimes_A M \to S^{-1}M$, рассмотрим билинейное над A отображение $(S^{-1}A) \times M \to S^{-1}M$, заданное формулой $(a/s, m) \mapsto am/s$ (тут нужно проверить корректность).

Гомоморфизм $S^{-1}M \to (S^{-1}A) \otimes_A M$ задаётся формулой $m/s \mapsto 1/s \otimes m$, проверим корректность. Если $m/s = m'/s'$, то при некотором $t \in S$ выполнено $t(ms' - m's) = 0$. Имеем

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{ts'}{sts'} \otimes m = \frac{1}{sts'} \otimes ts'm = \frac{1}{sts'} \otimes tsm' = \frac{ts}{sts'} \otimes m' = \frac{1}{s'} \otimes m.$$

Остаётся проверить, что построенные отображения – гомоморфизмы модулей над $S^{-1}A$ и что они взаимно обратны. □

Замечание 9. Это предложение, по сути, означает, что функтор локализации – это частный случай общей конструкции *расширения скаляров*.

Пусть $\phi\colon A \to B$ – гомоморфизм колец, тогда B становится A-модулем: определим $a \cdot b$ как $\phi(a)b$. Пусть M – модуль над A, построим по нему B-модуль. А именно, возьмём A-модуль $B \otimes_A M$ и сделаем его B-модулем. Умножение зададим формулой $b \cdot b' \otimes m = bb' \otimes m$. Говоря аккуратнее, определим умножение $B \times B \otimes_A M \to B \otimes_A M$ как композицию

$$B \times B \otimes_A M \to B \otimes_A (B \otimes_A M) \to (B \otimes_A B) \otimes_A M \to B \otimes_A M$$

(здесь использована ассоциативность тензорного умножения и гомоморфизм умножения $B \otimes_A B \to B$).

Таким образом, тензорное умножение на B над A даёт функтор из A-модулей в B-модули. Для $B = S^{-1}A$ получается функтор локализации.

Следствие 10. *Локализация перестановочна с тензорным умножением: для A-модулей M, N имеем $(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N) \cong S^{-1}(M \otimes_A N)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N) &\cong ((S^{-1}A) \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} ((S^{-1}A) \otimes_A N) \cong \\ &\cong (M \otimes_A (S^{-1}A)) \otimes_{S^{-1}A} ((S^{-1}A) \otimes_A N) \cong M \otimes_A ((S^{-1}A) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A)) \otimes_A N \cong \\ &\cong M \otimes_A (S^{-1}A) \otimes_A N \cong (S^{-1}A) \otimes_A (M \otimes_A N) \cong S^{-1}(M \otimes_A N).\end{aligned}$$

□

Геометрический смысл локализации – переход от всего спектра кольца к его более маленьким частям, например главным открытым подмножествам или «бесконечно малой» окрестности точки. Вопрос часто бывает проще решить над локальным кольцом, чем над произвольным. При этом многие глобальные свойства сводятся к локальным.

Для простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ обозначим через $M_\mathfrak{p}$ локализацию $S^{-1}M$, где $S = A \setminus \mathfrak{p}$.

Определение 11. Говорят, что некоторое свойство $\mathcal{P}$ модуля M над кольцом A *локально*, если выполнение $\mathcal{P}$ для M над A равносильно выполнению $\mathcal{P}$ для $M_\mathfrak{p}$ над $A_\mathfrak{p}$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$.

Приведём некоторые примеры.

Предложение 12. *Модуль $M = 0 \iff M_\mathfrak{p} = 0$ для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A \iff M_\mathfrak{m} = 0$ для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$.*

Доказательство. Оба следствия $\Rightarrow$ очевидны, выведем из третьего утверждения первое. Пусть $m \in M, m \neq 0$. Рассмотрим $\operatorname{Ann} m = \{a \in A \mid am = 0\} \subset A$, это идеал. Так как $m \neq 0$, идеал $\operatorname{Ann} m$ собственный, вложим его в максимальный идеал $\mathfrak{m}$. Тогда для $S = A \setminus \mathfrak{m}$ имеем $S \cap \operatorname{Ann} m = \emptyset$, значит $m/1 \neq 0$ в $S^{-1}M = M_\mathfrak{m}$. □

Предложение 13. *Верны следующие утверждения:*

1. *Свойство гомоморфизма быть инъективным локально: гомоморфизм $\phi\colon M \to N$ инъективен $\iff$ для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ гомоморфизм $\phi_\mathfrak{p}\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ инъективен $\iff$ для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ гомоморфизм $\phi_\mathfrak{m}$ инъективен.*

2. *Свойство быть сюръективным локально.*

3. *Свойство быть изоморфизмом локально.*

Доказательство. Докажем 1. Первое следствие $\Rightarrow$ верно, так как локализация точна. Второе следствие $\Rightarrow$ верно так как максимальные идеалы просты. Покажем, что из третьего утверждения следует первое. Пусть $K = \ker\phi$. Рассмотрим точную последовательность $0 \to K \to M \to N$. При локализации по максимальному идеалу $\mathfrak{m}$ получим точную последовательность $0 \to K_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \xrightarrow{\bar\phi} N_\mathfrak{m}$. Здесь $\bar\phi$ инъективен, поэтому $K_\mathfrak{m} = 0$. Это верно для всех $\mathfrak{m}$, и по предложению 12 получаем, что $K = 0$, следовательно ϕ инъективен.

Утверждение 2 доказывается аналогично, используется точная последовательность $M \xrightarrow{\phi} N \to N/\operatorname{im}\phi$.

Утверждение 3 сразу следует из 1 и 2. $\square$

Примером локальных свойств является и эта

Задача 2. a) Покажите, что $\mathcal{N}(A) = 0 \iff \mathcal{N}(A_\mathfrak{p}) = 0$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$.
b) Верно ли, что в A нет делителей нуля $\iff$ в $A_\mathfrak{p}$ нет делителей нуля для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$?